

ПРЕЦИЗНИ МЕТОДИ ЗА ТОМОГРАФИЯ НА КВАНТОВИ ПРОЦЕСИ

Станчо Георгиев Станчев

Научен ръководител: акад. Николай Витанов Витанов

Център за квантови технологии

Физически факултет

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ



АВТОРЕФЕРАТ

София 2024

Съдържание

1	Въведение	2
2	Квантова обработка на информация	4
2.1	Квантови постулати и томография	4
2.2	Отворени квантови системи	6
2.2.1	Главно (master) уравнение и Краус еволюция	6
2.2.2	Представяне на процеси	7
2.2.3	Стандартна квантова процесна томография (SQPT)	9
2.2.4	Показатели на грешки. Точност и прецизност	10
3	Мултипроцесна квантова томография	11
3.0.1	Матрица на грешката и показатели за грешка	11
3.0.2	MQPT: концептуална рамка	12
3.1	Итеративни и линейни методи	13
3.1.1	Итеративен метод на последваща обработка	13
3.1.2	Линеен метод за инволютивни гейтове	14
3.1.3	Линейна апроксимация за произволни целеви гейтове	15
3.1.4	Код на Python за намиране на матрицата на грешката $\hat{\epsilon}$	15
3.2	Експериментална демонстрация на MQPT на реален квантов процесор <code>IBMQ_MANILA</code>	16
3.3	Симулация на MQPT	19
3.3.1	Описание на симулацията	19
3.3.2	MQPT симулация на CNOT гейт	20
4	Кохерентно взаимодействие на квантови системи с поредица от импулси	23
4.1	Въведение	23
4.2	Казуси	24
4.3	Системи със симетрия на Вигнер-Майорана	26
4.3.1	Пропагатор на Вигнер-Майорана	26
4.3.2	Многоимпулсен (Мултипроцесен) WM пропагатор	27
4.3.3	Примери: система с три нива	28
4.4	Системи с Морис-Шор симетрия	30
4.4.1	Еднопроцесен MS Пропагатор	30
4.4.2	Мултипроцесен MS пропагатор	32
4.4.3	Специален случай: Мултиподна система	34
4.5	Система, притежаваща WM и MS симетрии	36
5	Характеризиране на високо-прецизни	

Раманови кюбитни гейтове	39
5.1 Въведение	39
5.2 Еднопроцесен и мултипроцесен преход	41
5.2.1 Еднопроцесен преход	41
5.2.2 Целеви гейтови параметри и заселености	43
5.2.3 Мултипроцесен преход	44
5.3 Близко-резонансно (NR) приближение	45
5.3.1 Предположения и допускания	45
5.3.2 Раби модел и NR приближение	45
5.3.3 Фиделити	46
5.4 Определяне на гейтовите грешки	47
5.4.1 Определяне на γ	47
5.4.2 Определяне на α и β	48
5.5 Сравнение на NR приближението с други модели	50
5.5.1 Розен-Зинер (RZ) модел	51
5.5.2 \sin^2 модел	52
5.5.3 Втори тригонометричен модел	53
6 Заключение	54

Глава 1

Въведение

Квантовата процесна томография (QPT) е решаваща техника в обработката на квантовата информация, която предоставя ценна представа за поведението на квантовите системи и техните съставни квантови операции [NC12; CN97; PCZ97; OBr+04]. В преследването на широкомащабни квантови компютри, тя играе жизненоважна роля в характеризиранието на точността на квантовите гейтове и квантовите вериги [Rie+06; Tin+21; Bia+10]. От гледна точка на това как характеризираният процес се прилага в рамките на веригата, преди измерването, можем да категоризираме тези техники в две групи: такива, които използват единични приложения на процеса и такива, които използват множество приложения, често наричани дълги последователности, гейтови повторения, мултипроцеси, мултипасове и др. Техниките с еднопроцесно прилагане включват например Стандартна квантова процесна томография SQPT [NC12; CN97; PCZ97; OBr+04; FH01], Спомагателно – Асистирана (Ansiilla-Assisted) QPT (AAPT) [Alt+03], Директно характеризиране на квантовата динамика (DCQD) [MRL08; RMM24], QPT с компресиран сензинг [Rod+14], QPT с градиентно спускане [AQK23] и др. . Тези методи и особено SQPT са изправени пред значителни предизвикателства, едно от които е, че са относително податливи на измервателни грешки – това са грешки причинени от спомагателни гейтове служещи за подготвяне на състоянието и проекционно измерване (SPAM) , отчитането (readout) и статистически грешки (shot noise) Методите, които значително подобряват прецизността на томографията, са тези, които използват мултипроцесно прилагане (гейтови повторения). Към момента най-прецизните такива протоколи са Преплетен (Interleaved) Рандомизиран Бенчмаркинг (IRB) [Mag+12] и Томография на набор от гейтове (Gate Set Tomography -GST) [Nie+21; Gre15], която е продължение на Самосъгласувана QPT [Mer+13; SIT21] . IRB е проектиран да характеризира конкретен гейт, който се „поставя“ многократно в случайна RB последователност. Протоколът е разширение на стандартния RB, който включва изпълнение на последователности от произволни гейтове. Този метод обаче дава само средно фиделити на гейта, тоест само едно число, но не и детайли относно елементите на матрица на процеса.

При GST , ключовата разлика в сравнение с по-старите QPT методи е неговата природа без калибриране. За разлика от своите предшественици, GST не разчита на подготовка и измервания на предварително калибрирано състояние. Получаването на оценка на GST обаче включва решаване на силно нелинеен оптимизационен проблем. Нещо повече, мащабирането с размера на системата е полиномно по-голямо от QPT поради необходимостта да се характеризират множество гейтове едновременно. За да се оцени пълен набор от гейтове, са необходими приблизително 80 експеримента за еднокюбитна система и над 4000 за порти с двукюбитна. Това е много повече от SQPT, която изисква само 12 експеримента за еднокюбитен гейт и 144 експеримента за двукюбитен [Gre15]. Това означава, че за да направим прецизна процесна томография са необходими сериозни експериментални и изчислителни ресурси.

С мотивация от тези предизвикателства, тезата „Прецизни методи за томография на квантови процеси“ се фокусира на използването на мултипроцесно прилагане, което води до усилване на грешки чрез дълги последователности от идентични процеси. Тезата е базирана на три работи, които илюстрират този подход.

Първо, въвеждаме метод [SV24b] за смекчаване на грешките при процесна томография, причинени от измервателни грешки като SPAM, рийдаут и статистически шум. Този подход включва извършване на SQPT върху мултипроцесна поредица, състояща се от множество идентични при-

ложения на един и същ гейт, след което чрез техники за последваща обработка намираме единичния процес. Ефективността на този метод се демонстрира чрез симулации и експериментални приложения върху процесори на IBM Quantum.

Освен това, дисертацията изследва унитарни процеси с кохерентни грешки. Втората работа е фокусирана върху динамиката на квантовите системи с множество състояния, взаимодействащи с поредица от импулси (мултипроцеси), притежаващи динамични симетрии на Wigner-Majorgana и Morris-Shore [SV23]. Тук са изведени точни аналитични формули за описание на това взаимодействие. Същността на този подход е в повтарящото се взаимодействие на квантовата система с импулсна поредица, което води до усилване на определени характеристики на системата.

Третата работа [SV24a], представлява томографски метод за измерване на гейтови грешки в Raman qubit гейтове, които притежават динамична симетрия на Морис-Шор. Чрез повтаряне на една и същ гейт многократно, малки кохерентни грешки се усилват до измерими нива. Това усилване позволява прецизно и точно определяне на еднопроцесните грешки, показвайки ефективността на процесната томография чрез мултипроцеси.

Глава 2

Квантова обработка на информация

2.1 Квантови постулати и томография

В основата на квантовата информатика и в частност квантовата обработка на информация (Quantum Information Processing - QIP) лежат четирите постулата на квантовата механика [NC12]:

- Постулат 1 за състоянието;
- Постулат 2 за еволюцията;
- Постулат 3 за измерването;
- Постулат 4 за композитни системи.

Фигура 2.1 визуално обобщава тези постулати, оформяйки теоретичната основа за изследване на QIP.

Постулат 1 указва, че информацията на една квантова система в някакъв момент от време t е записана в квантовото състояние $|\Psi(t)\rangle$. Това състояние е вектор в Хилбертово пространство \mathcal{H} с размерност d . Съгласно този постулат, състоянието се разлага по базисните състояния

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i(t) |\Psi_i\rangle. \quad (2.1)$$

В случай на система от кубити размерността е $d = 2^n$, където n е броят на кубитите. Това са материалните (физическите) носители на квантова информация, които могат да са от различно естество, например атоми, йони, фотони, свръхпроводящи трептящи кръгове и др.

Постулат 2 определя самата обработка на информацията, а именно как системата еволюира от едно състояние в друго. Физически, тази еволюция се управлява от уравнението на Шрьодингер

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.2)$$

където $\hat{H}(t)$ е контролиращия Хамилтониан на системата, който определя унитарната еволюция. Ако Хамилтониана е постоянен тази еволюция може да се представи като

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.3)$$

където $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ е унитарния пропагатор на системата, водещ състоянието от начално време t_0 до текущо t . С този пропагатор, принципно се описва физически процес, но също така в него е закодиран логическия алгоритъм, което правилно изпълнение е основна цел на QIP. Този алгоритъм, обработващ информацията чрез съответния пропагатор (процес) се състои от множество подпроцеси наречени гейтове. От своя страна гейтовете могат да бъдат еднокюбитни (X, Y, Z , Hadamard, фазови, ротиращи и др.) ; двукюбитни (CNOT, SWAP, CZ, и др.) ; трикюбитни (Toffoli, Fredkin) и т.н.

Постулат 3 се отнася за измерването, при което състоянието $|\Psi\rangle$ колабира в едно от базисните

състояния Ψ_i . Този постулат определя вероятността p_i изходния резултат да бъде Ψ_i

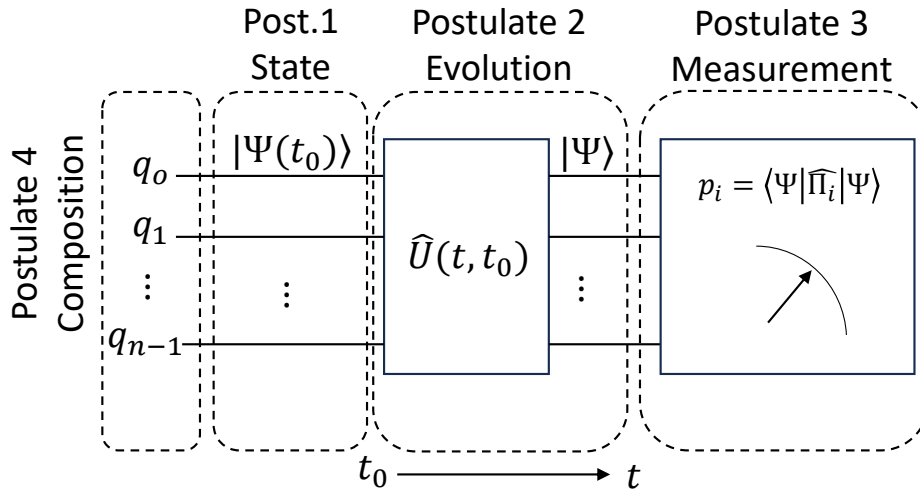
$$p_i = \langle \Psi | \hat{\Pi}_i | \Psi \rangle, \quad (2.4)$$

където оператора $\hat{\Pi}_i$ описва самото измерване, което в идеалния случай е проекционно PVM (Projective Value Measure) или още наричано измерване на фон-Нойман.

Постулат 4 капсулира една многочастична система, която включва n отделни квантови подсистеми (кюбити). За съставна квантова система, която може да включва заплетени подсистеми, общото Хилбертово пространство се конструира чрез тензорното произведение на Хилбертовите пространства, съответстващи на всяка отделна компонентна система.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \otimes \mathcal{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(n-1)}. \quad (2.5)$$

Така, когато имаме един кюбит базовите състояния са $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, при два кюбита са $\{|0 \otimes 0\rangle, |0 \otimes 1\rangle, |1 \otimes 0\rangle, |1 \otimes 1\rangle\}$ и т.н.



Фигура 2.1: Визуално обобщение на постулатите на квантовата механика и тяхното приложение в обработката на квантовата информация (QIP): Тази диаграма илюстрира четирите основни постулата на квантовата механика, приложени към QIP. Постулат 1 определя състоянието на квантовата система. Постулат 2 описва детерминистичната еволюция на квантовото състояние чрез унитарна еволюция, в която са закодирани алгоритмите. Постулат 3 представлява вероятностния процес на измерване, водещ до колапс на състоянието. Постулат 4 капсулира съставна (многочастична) система, която включва n отделни квантови подсистеми q_0, q_1, \dots, q_{n-1} , подготвяйки сцената за сложни квантови явления като заплитане.

Така описаната постановка на QIP, обаче е идеализирана, тъй като разчита на перфектни компоненти, които я формират. В реалния (физически) свят, системата не е изолирана а е отворена и взаимодействаща с околната среда. Така състоянията Ψ вече не са чисти, а смесени, описващи се от матрица на плътността $\hat{\rho}$; Еволюцията преминава от унитарна в неунитарна; Измерванията не са идеални PVM, а обобщени POVM (Positive Operator Value Measure) измервания. При това положение може лесно да се досетим, че точността и прецизността на отделните компоненти са от решаващо значение за правилното функциониране на логическия алгоритъм, проведен чрез физическа сиситема. По тази причина се налага провеждането на три основни валидиращи проверки (характеризации) на тези компоненти наречени с общия термин *квантова томография*:

- *Томография на състоянието*, съответстваща на постулат 1, осигурява точното характеризане на квантовите състояния;
- *Процесна томография*, съобразена с постулат 2, потвърждава динамиката на квантовата еволюция;
- *Томография на измерването*, свързана с постулат 3, потвърждава коректността на квантовите измервания.

Заедно тези томографски техники позволяват цялостна оценка на характеристиките на QIP системата.

2.2 Отворени квантови системи

2.2.1 Главно (master) уравнение и Краус еволюция

Динамиката на отворените системи математически се описва чрез главни (master) уравнения, обобщаващи уравнението на Шрьодингер (фон-Нойман), включващи както Марковски, така и не-Марковски процеси. В тази работа ние си служим с Марковските процеси, описващи се от Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) уравнението [GKS76; Lin76] и представянето на Краус [Kra71; Kra+83]. В тези процеси вместо уравнението на фон-Нойман

$$i\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (\hbar = 1), \quad (2.6)$$

се използва GKSL уравнението

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] + \sum_{k=1}^{d^2-1} \gamma_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho}(t) \} \right) \equiv \hat{\mathcal{L}} \hat{\rho}, \quad (2.7)$$

където първият член от дясната страна отчита унитарната част на еволюция, докато втория член с постоянните *колас* оператори \hat{L}_k и съответните разсейващи коефициенти γ_k отчита неунитарната (некохерентна) еволюция. Генераторът на еволюцията \mathcal{L} , известен като Линдбладиян, капсулира цялата неунитарна динамика на отворената квантова система. Решението на диференциалното уравнение $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \mathcal{L} \hat{\rho}$ се проявява като квантова карта, по отношение на $\hat{\rho}$ поддържайки основните две характеристики $\hat{\rho} > 0$ и $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, тоест имаме *напълно положителна и запазваща следи карта* (Completely Positive and Trace Preserving CPTP map).

Така, уравнението за унитарната еволюцията на състоянието в затворена система, изразена чрез пропагатора \hat{U} във вида

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t), \quad (2.8)$$

придобива общия неунитарен вид на Краус еволюция в отворена система

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k \hat{\mathcal{K}}_k(t) \hat{\rho}(0) \hat{\mathcal{K}}_k^\dagger(t), \quad (2.9)$$

което още се нарича представяне на сумата на оператори. Тук операторите $\hat{\mathcal{K}}_k(t)$ се наричат Краус оператори удовлетворяващи условията за пълнота $\sum_k \hat{\mathcal{K}}_k^\dagger(t) \hat{\mathcal{K}}_k(t) = \mathcal{I}$, където \mathcal{I} е единичната матрица. Максималния брой на Краус операторите е d^2 , тоест $k = 0, 1, \dots, k_{max}$, където $k_{max} \leq d^2 - 1$, като при унитарен процес имаме само един $\hat{\mathcal{K}}_0$. За удобство ние приемаме, че $k_{max} = d^2 - 1$, така че дори някой от тези оператори практически да липсва, ние го считаме за нулев оператор.

2.2.2 Представяне на процеси

Уравнение (2.9) представя квантовия процес в Краус представяне, така че ако операторите $\hat{\mathcal{K}}_k$ са известни, то процеса е също известен. Отчитайки последната условност (за наличието на d^2 Краус оператори), това се представя още като

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_{k=0}^{d^2-1} \hat{\mathcal{K}}_k \hat{\rho} \hat{\mathcal{K}}_k^\dagger, \quad (2.10)$$

където оператора $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ е нова матрица на плътността произлязла от по-ранната $\hat{\rho}$, при което $\{\hat{\rho}, \mathcal{E}(\hat{\rho})\} > 0$ и $\text{Tr}(\mathcal{E}(\hat{\rho})) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. От това следва, че $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ е СРТР карта, тоест води състоянието $\hat{\rho}$ като непрекъснато му запазва СРТР свойствата.

Наред с Краус представянето има и други СРТР представяния на процеси, като тези на Стайн-спринг (Stinespring) [Sti55], Чой-Ямиолковски(Choi-Jamiolkowski) [Cho72; Cho75; Jam72]; χ -представяне или представяне на матрицата на процеса; Лиувил (или супероператор) и Паули трансфер матричното представяне (РТМ).

В нашата работа ние основно използваме РТМ представянето $\hat{\mathcal{R}}$ и супероператор $\hat{\mathcal{S}}$. РТМ може да се получи от Краус представянето по следната формула

$$(\hat{\mathcal{R}})_{ij} = \frac{1}{d} \text{Tr} \left[\hat{P}_i \left(\sum_k \hat{\mathcal{K}}_k \hat{P}_j \hat{\mathcal{K}}_k^\dagger \right) \right], \quad (2.11)$$

където $\{\hat{P}_i(n)\}$ се нарича Паули базис и се дефинира като

$$\{\hat{P}_i(n)\} = \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}. \quad (2.12)$$

Представянето РТМ е в така нареченото Хилберт-Шмит пространство с размерност d^2 . В това представяне матрицата на плътността $\hat{\rho}$ се векторизира като супервектор $|\hat{\rho}\rangle\rangle$ с размерност $d^2 \times 1$. Това става като първо разложим самата матрица по Паули базиса

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d^2-1} r_i \hat{P}_i, \quad (2.13)$$

където коефициентите $r_i = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_i) \in [-1, 1]$ са реални. С тези коефициенти се конструира супервектора

$$|\hat{\rho}\rangle\rangle = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_{d^2-1})^T, \quad (2.14)$$

при което нулевия елемент r_0 е винаги единица: $r_0 = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_0) = \text{Tr}(\hat{\rho} I^{\otimes n}) = 1$. Тогава РТМ матрицата се явява супероператор, който води супервектора $|\hat{\rho}\rangle\rangle$ към ново състояние $|\hat{\rho}'\rangle\rangle$

$$|\hat{\rho}'\rangle\rangle = \hat{\mathcal{R}} |\hat{\rho}\rangle\rangle \quad (2.15)$$

Тъй като състоянието представено от супервектора $|\hat{\rho}\rangle\rangle$ е реално, следва че и РТМ $\hat{\mathcal{R}}$ е също реална

матрица с постоянен първи ред

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_{11} & \cdots & \mathcal{R}_{1,d^2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_{d^2-1,0} & \mathcal{R}_{d^2-1,1} & \cdots & \mathcal{R}_{d^2-1,d^2-1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Друго удобство, както за $\hat{\mathcal{R}}$, така и за $\hat{\mathcal{S}}$ е, че ако имаме поредица от процеси в една верига:

$$\langle \hat{\rho} \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}^n} \boxed{\hat{\mathcal{R}}_1} - \boxed{\hat{\mathcal{R}}_2} - \cdots - \boxed{\hat{\mathcal{R}}_N} \langle \hat{\rho}' \rangle, \quad (2.17)$$

тогава общия процес е матрично произведение на отделните процеси $|\hat{\rho}'\rangle = \hat{\mathcal{R}}_N \cdots \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{R}}_1 |\hat{\rho}\rangle$ и съответно ако процесите са еднакви имаме матрична степен $|\hat{\rho}'\rangle = \hat{\mathcal{R}}^N |\hat{\rho}\rangle$.

В таблица 2.1 са дадени преобразуванията между различните $d^2 \times d^2$ представяния с използване на *базис-трансформация оператор* \hat{U} и оператора *колонно пренареждане* R_c .

from/to	Chi χ	Choi $\hat{\mathcal{C}}$	PTM $\hat{\mathcal{R}}$	SuperOp $\hat{\mathcal{S}}$
Chi χ	—	$\hat{\mathcal{C}} = \hat{U}^\dagger \chi \hat{U}$	$\hat{\mathcal{R}} = \hat{U}^\dagger R_c(\hat{U}^\dagger \chi \hat{U}) \hat{U}$	$\hat{\mathcal{S}} = R_c(\hat{U}^\dagger \chi \hat{U})$
Choi $\hat{\mathcal{C}}$	$\chi = \hat{U} \hat{\mathcal{C}} \hat{U}^\dagger$	—	$\hat{\mathcal{R}} = \hat{U}^\dagger R_c(\hat{\mathcal{C}}) \hat{U}$	$\hat{\mathcal{S}} = R_c(\hat{\mathcal{C}})$
PTM $\hat{\mathcal{R}}$	$\chi = \hat{U} R_c(\hat{U} \hat{\mathcal{R}} \hat{U}^\dagger) \hat{U}^\dagger$	$\hat{\mathcal{C}} = R_c(\hat{U} \hat{\mathcal{R}} \hat{U}^\dagger)$	—	$\hat{\mathcal{S}} = \hat{U} \hat{\mathcal{R}} \hat{U}^\dagger$
SuperOp $\hat{\mathcal{S}}$	$\chi = \hat{U} R_c(\hat{\mathcal{S}}) \hat{U}^\dagger$	$\hat{\mathcal{C}} = R_c(\hat{\mathcal{S}})$	$\hat{\mathcal{R}} = \hat{U}^\dagger \hat{\mathcal{S}} \hat{U}$	—

Таблица 2.1: Преобразуване между четирите $d^2 \times d^2$ представяния на квантови процеси (каналы), с използване на *базис-трансформация оператор* \hat{U} и оператора *колонно пренареждане* $R_c(Q)$.

Операторът за базисна трансформация \hat{U} е унитарен оператор и представлява връзката между изчислителния базис $\{|i\rangle\}$ и Паули базиса $\{|\hat{P}_i\rangle\}$. Неговите оригинални и спрегнати транспонирани форми са

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d^2-1} |i\rangle \langle \hat{P}_i| \quad (2.18a)$$

$$\hat{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d^2-1} |\hat{P}_i\rangle \langle i|, \quad (2.18b)$$

където всички $|i\rangle$ представляват изчислителен базис и всички те са възможни низове от $|0\rangle = (|0, 0, \dots, 0\rangle)^T$ до $|d^2 - 1\rangle = (|1, 1, \dots, 1\rangle)^T$.

Оператора *колонно пренареждане* $R_c(Q)$ се дефинира като се представи процеса Q като тензор с компоненти

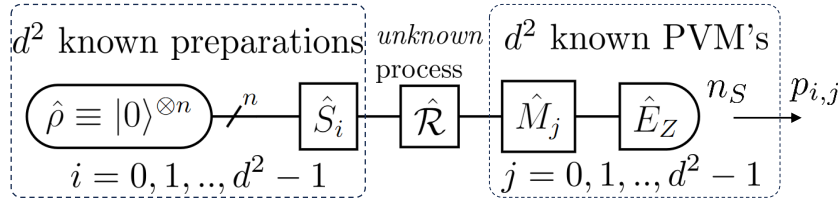
$$Q_{m,\mu;n,\nu} = \langle m, \mu | Q | n, \nu \rangle,$$

където $|n, \nu\rangle = |n\rangle \otimes |\nu\rangle$, $m, n, \mu, \nu \in \{0, \dots, d-1\}$ и всички вектори са в изчислителен базис. Тогава $R_c(Q)$ се дефинира като

$$R_c : Q_{m,\mu;n,\nu} \mapsto Q_{\nu,\mu;n,m}. \quad (2.19)$$

2.2.3 Стандартна квантова процесна томография (SQPT)

В реалния свят, за да измерим нещо, ние използваме други неща, които смятаме за надеждни (доверителни), на които "вярваме". Всеки квантов процесор е снабден с начални състояния, процеси (гейтове) и измервания и характеризирането на всеки от тези компоненти налага използването на останалите. SQPT не е изключение и за да намери напълно непознат процес, тя използва спомагателни състояния, процеси и измервания, които счита за известни и идеални. Така, първоначалното състояние на всички кубити се счита за точно (обикновено $|0\rangle$). След това, за да се определи неизвестният процес, са необходими множество експерименти, всеки от които изисква d^2 ортонормални подготвителни състояния. Втория етап е прилагането на неизвестният гейт (процес). Третия етап, подобно на първия осъществява d^2 проективни измервания. Както подготвителните състояния $|\hat{\rho}_i\rangle = S_i|\hat{\rho}\rangle$, така и измерванията $\langle\langle\hat{E}_j| = \langle\langle\hat{E}_Z|M_j$, които се извършват с помощта на SPAM (State Preparation and Measurement) гейтовете S_i и M_j се считат за известни и точни. За всички експерименти се правят хиляди повторения n_S , наречени шотове, за да може да се събере достатъчна статистика и да се определят съответните вероятности $p_{i,j}$.



Фигура 2.2: Обща постановка на експерименталните вериги при стандартната квантова процесна томография (SQPT). Първоначално се подготвят d^2 ортонормални състояния $|\hat{\rho}_i\rangle = \hat{S}_i|\hat{\rho}\rangle$, които се считат за известни и перфектни след което се прилага неизвестния процес $\hat{\mathcal{R}}$. Накрая се правят d^2 проекционни PVM измервания $\langle\langle\hat{E}_j| = \langle\langle\hat{E}_Z|M_j$ като при всеки експеримент се правят n_S повторения и от тях статистически се определят вероятностите $p_{i,j}$.

Ако се допусне, че броят на шотовете е безкраен ($n_S \rightarrow \infty$), тогава измерените вероятности могат да се представят съгласно правилото на Борн като вътрешно произведение на Хилберт-Шмит пространството

$$p_{i,j} = \langle\langle\hat{E}_j|\hat{\mathcal{R}}|\hat{\rho}_i\rangle\rangle. \quad (2.20)$$

Тези вероятности общо наброяват d^4 и могат да се подредят в матрицата

$$\hat{p} = \hat{A}\hat{\mathcal{R}}\hat{B}, \quad (2.21)$$

където матриците \hat{A} и \hat{B} са известни и съставени от съответните подготвителни състояния и измервания

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \langle\langle\hat{E}_0| \\ \langle\langle\hat{E}_1| \\ \vdots \\ \langle\langle\hat{E}_{d^2-1}| \end{pmatrix} \quad (2.22a)$$

$$\hat{B} = (|\hat{\rho}_0\rangle\rangle, |\hat{\rho}_1\rangle\rangle, \dots, |\hat{\rho}_{d^2-1}\rangle\rangle) \quad (2.22b)$$

Така, след като матрицата на вероятностите p е също известна от измерванията на всички

експериментални вериги, реконструирането на неизвестния процес $\hat{\mathcal{R}}$ става с линейната инверсия:

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{A}^{-1} \hat{\rho} \hat{B}^{-1}. \quad (2.23)$$

Като последна стъпка, се прави Максимално достоверна оценка (Maximum Likelihood Estimation) [Nie+21; Jam+01], за да се намери физически процес съответстващ на СРТР РТМ матрица.

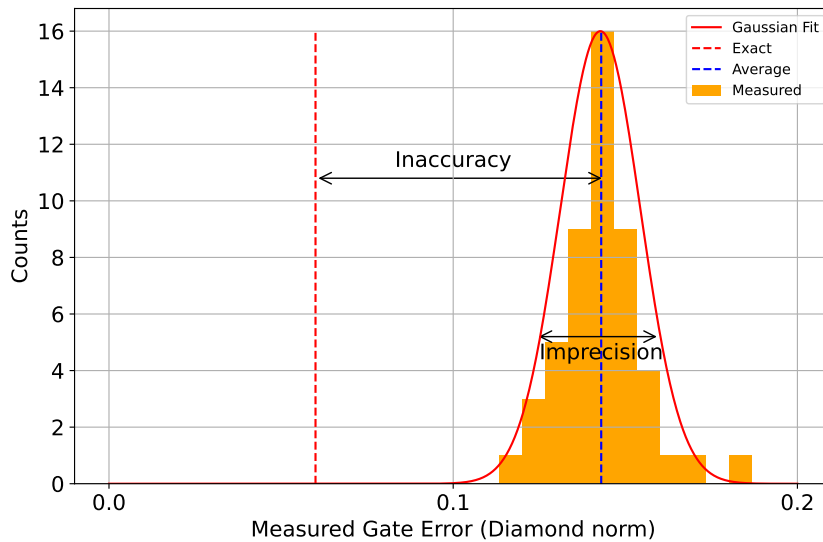
2.2.4 Показатели на грешки. Точност и прецизност

Качеството на всеки процес $\hat{\mathcal{R}}$ се оценява с показатели на грешки, които най-общо са математически норми спрямо даден идеален процес $\hat{\mathcal{T}}$. В нашата работа използваме

Диамантена норма $\|\hat{\mathcal{R}} - \hat{\mathcal{T}}\|_{\diamond} = \|\hat{\epsilon}\|_{\diamond}$;

Процесно инфиделити $e_F = 1 - \text{Tr}(\hat{\mathcal{T}}^\dagger \hat{\mathcal{R}}) / d^2$.

Когато обаче оценяваме качеството на процесната томография, ние искаме да знаем какви са отклоненията на измерения процес спрямо истинския. Както показахме, при стандартната SQPT томография се разчита, на точността на измервателни (SPAM) гейтове и рийдаут, които обаче може да са неточни. Второ, ние допуснахме, че шотовете $n_S \rightarrow \infty$, но те са краен брой. Така, имаме систематични и статистически грешки. Когато се проведат множество томографии на един и същ процес, се получават различни резултати, които при обединяване в обща картина, се получава разпределение, близко до Гаусовото. На Фиг. 2.3 е показана симулация с такова разпределение за 50 томографии, при които за показател на грешки е използвана диамантена норма. Отклонението на средната стойност спрямо точната се нарича неточност, докато стандартното отклонение, което е приблизително $1/\sqrt{n_S}$ се нарича непрецизност. Нашата работа е насочена към подобряване на точността и прицизността на това разпределение, тоест приближаване към точната стойност и стесняване.



Фигура 2.3: Хистограма на измерените грешки от 50 симулации със SQPT с оценка на диамантената норма. Оранжеви ленти представлява разпределението на гейтовите грешки, наблюдавани в симулациите. Неточността се приписва главно на систематични грешки като СПАМ и рийдаут, докато непрецизността е свързана със статистически грешки (shot noise), пропорционални на $1/\sqrt{n_S}$, където n_S е броят на шотовете.

Глава 3

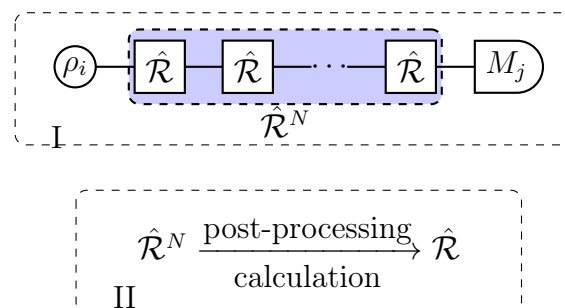
Мултипроцесна квантова томография

В тази глава представяме метод за подобряване на прецизността и точността на квантовата процесна томография (QPT) чрез смекчаване на грешките, причинени от SPAM, рийдаут и статистически шум (shot noise). Вместо да изпълняваме SQPT само на един гейт, ние предлагаме да я изпълняваме на поредица от еднакви гейтове. Методът включва измерване на PTM на мултипроцеса чрез SQPT и след това чрез последваща обработка извежда PTM на единичния процес. За тази процедура предлагаме два алтернативни подхода: итеративен подход, който на теория дава точния резултат за малки грешки, и линеаризиран подход, базиран на решаване на уравнението на Силвестър. Ние изследваме ефективността на тези два подхода чрез симулации на IBM Quantum, използвайки `IBMQ_QASM_SIMULATOR`. В сравнение с методите от типа рандомизиран бенчмаркинг, предложеният метод доставя целия PTM, а не едно число (фиделити). В сравнение със SQPT, нашият метод предоставя PTM с много по-висока точност и прецизност, тъй като значително намалява измервателните грешки. Предложеният метод е приложен и експериментално на CNOT гейт на квантовия процесор `IBMQ_MANILA (Falcon r5.11L)` [IBM23].

Метода наречен *Мултипроцесна квантова томография* (MQPT), комбинира методите, базирани на повторения, с тези, които използват само единично прилагане на гейта. Повторенията водят до усилване на грешките на единичния процес в *мултипроцесни* грешки, които след това се измерват с висока точност и прецизност чрез SQPT. Метода има две предимства (i) не въвеждаме допълнителни грешки, произтичащи от други гейтове, и (ii) дава проста и бърза процедура за последваща обработка, която извлича единичния процес от мултипроцеса. Метода се отличава със своята интуитивност и простота, тъй като използва вече разработените стандартни техники, като SQPT, и намалена математическа сложност, което го прави теоретично достъпни практически осъществим.

3.0.1 Матрица на грешката и показатели за грешка

Преди да пристъпим към самия метод нека първо дефинираме единичния процес и неговите грешки. За целите на квантовите изчисления, процесите трябва да имат унитарни цели \hat{T} , затова несъответствието между действителния процес \hat{R} и целевия процес \hat{T} го дефинираме като



Фигура 3.1: Мултипроцесна томография (MQPT) се състои от два различни етапа. Етап I включва конвенционална процесна томография (напр. SQPT, AAPT и т.н.), но вместо да измерва единичен процес \hat{R} , се характеризира мултипроцес \hat{R}^N , който се състои от N идентични процеси (гейтове). В Етап II измереният мултипроцес се използва за извличане на единичния процес чрез изчислителна процедура за последваща обработка.

матрица на грешките

$$\hat{\epsilon} = \hat{\mathcal{R}} - \hat{\mathcal{T}}, \quad (3.1)$$

където $\hat{\epsilon}$ като цяло не е CPTP матрица. Характеризирането и анализът на $\hat{\epsilon}$ играят централна роля в оценката на точността и прецизността на методите за процесна томография, обсъдени по-долу.

Показатели за грешка

Като се имат предвид матриците $\hat{\mathcal{R}}$, $\hat{\mathcal{T}}$ и $\hat{\epsilon}$, можем да изчислим показателите за грешки на процеса. В тази глава ние използваме *диамантената норма* заедно с показателя за неточност (infidelity) на процеса. Диамантената норма (известна също като *напълно ограничена следова норма*) [AKN98; Kit97] е една от най-ефективните мерки за оценка на близостта на два процеса поради нейната повишена строгост. В нашия анализ ние формално я изразяваме като

$$\|\hat{\epsilon}\|_{\diamond} = \|\hat{\mathcal{R}} - \hat{\mathcal{T}}\|_{\diamond}. \quad (3.2)$$

За по-изчерпателни подробности относно диамантената норма, нейното определение и изчисление, препращаме читателя към Refs. [Wat09; Wat13]. В нашата работа, за численото изчисляване на $\|\hat{\epsilon}\|_{\diamond}$ и представянето и трансформациите на CPTP канала, ние използваме следните готови за използване инструменти на Python: QISKIT.QUANTUM_INFO, [con23], FOREST.BENCHMARKING.OPERATOR and QUTIP.SUPEROP_REPS [JNN13].

Процесното фиделити F и инфиделити (infidelity) e_F , са

$$F = \frac{\text{Tr}[\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{\mathcal{R}}]}{d^2} = 1 + \frac{\text{Tr}[\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{\epsilon}]}{d^2}, \quad (3.3a)$$

$$e_F = 1 - F = -\frac{\text{Tr}[\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{\epsilon}]}{d^2}. \quad (3.3b)$$

Целта на метода MQPT е не само да измерва $\|\hat{\epsilon}\|_{\diamond}$ по-точно, но и да намира отделните елементи на матрицата на грешката $\hat{\epsilon}$. Следователно за нашите симулации въвеждаме допълнителен показател, наречен *диференциална диамантена норма*, който се определя от разликата между измерената матрица на грешката $\hat{\epsilon}_N$ и действителната, т.е. $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_{\diamond}$.

3.0.2 MQPT: концептуална рамка

Основната структура на MQPT е показана схематично на Фиг. 3.1 и предполага като цяло два етапа. В етап I се прилагат N процеси вместо единичен процес $\hat{\mathcal{R}}$, така че последователността $\hat{\mathcal{R}}^N$, която представлява мултипроцес, е обект на характеризиране. Целта е да се усили гейт грешката $\hat{\epsilon}$ и да се използва повишената прецизност и точност на измерения мултипроцес, за да се подобри прецизността и точността на изведения единичния процес. Мултипроцеса може да се характеризира с конвенционален метод, като SQPT, AAPT или всякакви други методи, които по принцип прилагат характеризация процес само веднъж. Тъй като мултипроцеса включва големи (натрупани) грешки, последните могат да бъдат определени с висока точност и прецизност. Впоследствие етап II е изчислителна процедура за последваща обработка, използвана за получаване на единичния процес $\hat{\mathcal{R}}$ от мултипроцеса $\hat{\mathcal{R}}^N$. Етап I включва измервателни грешки, въведени от операциите за подготовка и измерване $\hat{\rho}_i$ и M_j . Всички грешки на измерване остават постоянни в двата края на цялата верига, т.е. те не се натрупват с увеличаване на N и се предполага, че са еднакви за единични и мултипроцеси. Това води до подобрене в измерването на

мультипроцеса $\hat{\mathcal{R}}^N$, тъй като само гейт грешката $\hat{\epsilon}$ се натрупва по време на неговия ход.

За извършване на етап II — извеждане на единичния PTM от мультипроцеса PTM — предлагаме два подхода:

- итеративен метод;
- линейно приближение.

Итеративният метод предоставя решение, което е практически точно по отношение на входните данни, получени от измерената матрица $\hat{\mathcal{R}}^N$. В този контекст терминът „точен“ се отнася единствено до съответствието между входа и изхода, вместо да показва прецизност при идентифициране на действителната матрица на грешката $\hat{\epsilon}$. Въпреки това, ако се счита, че $\hat{\mathcal{R}}^N$ се измерва с малки грешки, т.е. с голям брой шотове, тогава грешките при първоначалното измерване (като СПАМ и рийдаут) се смекчават, без да се въвеждат допълнителни грешки при последваща обработка. Това води до значително подобрене както на прецизността, така и на точността.

Линейният метод въвежда някои грешки при последваща обработка поради отчитането само на линейните членове в разширението на $\hat{\mathcal{R}}^N$ по отношение на матрицата на грешките $\hat{\epsilon}$. Следователно е приложим само за малки грешки. Въпреки това методът също се оказва полезен, особено когато томографията се извършва с относително малък брой шотове, т.е. при наличие на голям статистически шум. В този сценарий това влияе положително върху прецизността и точността, показвайки някои предимства пред итеративния метод. Това може да се оприличи на принципите на Wiener филтър при обработката на сигнали и изображения [Bou+94], където линейният подход се предпочита заради способността му ефективно да намалява шума и да подобрява яснотата на изображенията в шумна среда.

3.1 Итеративни и линейни методи

Както беше обсъдено по-горе, вторият етап на MQPT е обратната задача, в която целта е да се извлече единичният процес $\hat{\mathcal{R}}$ и съответно матрицата на грешката $\hat{\epsilon}$ от многопроходния процес $\hat{\mathcal{R}}^N = (\hat{\mathcal{T}} + \hat{\epsilon})^N$. Най-общо казано, този проблем има много решения. Въпреки това, ако приемем, че $\hat{\mathcal{R}}$ е процес с относително високо фиделити, т.е. $\|\hat{\epsilon}\| \ll \|\hat{\mathcal{T}}\|$ и $\hat{\mathcal{T}}$ е известна целева матрица, тогава задачата има стабилно и единствено решение. Първо ще направим това, като разгледаме практически точното итеративно решение и след това ще представим линейния метод.

3.1.1 Итеративен метод на последваща обработка

Методът се основава на итеративен подход, който съчетава принципите на пертурбативните методи с итеративно усъвършенстване, подобно на методите на градиентно спускане. В основата си алгоритъмът използва пертурбативна стратегия, въвеждайки $\hat{\epsilon}$ като незначителна модификация на $\hat{\mathcal{T}}$. Това смущение, значително по-малко по величина в сравнение с $\hat{\mathcal{T}}$ ($\|\hat{\epsilon}\| \ll \|\hat{\mathcal{T}}\|$), гарантира стабилност на решението. Методът се разгръща в итеративен цикъл, където всяка итерация коригира $\hat{\epsilon}$ въз основа на разликата между $(\hat{\mathcal{T}} + \hat{\epsilon})^N$ и $\hat{\mathcal{R}}^N$. Това итеративно усъвършенстване насочва решението към висока степен на прецизност, като обикновено намалява грешката до по-малко от 10^{-12} , което е „практически точно“ решение.

Итеративният метод протича по следния начин:

- *Инициализация:* Започваме с първоначално предположение за $\hat{\epsilon}$, обикновено $\hat{\epsilon} = 0$.
- *Итеративни стъпки за актуализиране:*

(i) Изчисляваме $\hat{\mathcal{R}}_{\text{current}}^N = (\hat{\mathcal{T}} + \hat{\epsilon})^N$.

(ii) Определяме разликата: $\delta = \hat{\mathcal{R}}^N - \hat{\mathcal{R}}_{\text{current}}^N$.

(iii) Актуализираме $\hat{\epsilon}$, като използваме: $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} + \alpha\delta$, където α е малък положителен коефициент на обучение (напр. 0,01).

- *Критерий за конвергенция:* Процесът се повтаря, докато нормата на $(\hat{\mathcal{T}} + \hat{\epsilon})^N - \hat{\mathcal{R}}^N$ падне под определен толеранс (напр. 10^{-12}), което показва че е намерено практически точно решение.

Кодът е представен в приложение 3.1.4.

Важно е да се отбележи, че за CNOT гейт методът работи с $N = 2m + 1$ преминавания, докато за вратата \sqrt{X} работи за $N = 4m + 1$ преминавания, където $m = 0, 1, 2, \dots$. В раздел 3.3, ние демонстрираме ефективността на този метод за \sqrt{X} и CNOT гейтовете чрез симулация на IBM Quantum `IBMQ_SIMULATOR`.

3.1.2 Линеен метод за инволютивни гейтове

Сега ще изведем линейното приближение за решението на $\hat{\epsilon} = f(\hat{\mathcal{R}}^N, \hat{\mathcal{T}}, N)$, което е валидно за инволютивни гейтове, т.е. гейтове, които удовлетворяват отношението

$$\hat{\mathcal{T}}^2 = \mathcal{I}, \quad (3.4)$$

Някои примери за инволютивни гейтове са

- еднокюбитни: X , Y , Z и H (Адамар);
- двукюбитни: CNOT, SWAP, Controlled Z;
- трикюбитни: Тофоли и Фредкин.

За тези случаи е удобно да изберем броя на процесите да бъде $N = 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), така че имаме $\hat{\mathcal{T}}^{2m+1} = \hat{\mathcal{T}}$. След това мултипроцеса

$$\hat{\mathcal{R}}^{2m+1} = (\hat{\mathcal{T}} + \hat{\epsilon})^{2m+1} \quad (3.5)$$

след развиване до втора степен на $\hat{\epsilon}$ се представя като

$$\hat{\mathcal{R}}^{2m+1} = \hat{\mathcal{T}} + (m+1)\hat{\epsilon} + m\hat{\mathcal{T}}\hat{\epsilon}\hat{\mathcal{T}} \quad (3.6a)$$

$$+ \frac{m(m+1)}{2}\hat{\epsilon}_a^2 + \frac{m(m-1)}{2}\hat{\epsilon}_b^2 + O(\hat{\epsilon}^3), \quad (3.6b)$$

с

$$\hat{\epsilon}_a^2 = \hat{\mathcal{T}}\hat{\epsilon}^2 + \hat{\epsilon}\hat{\mathcal{T}}\hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}^2\hat{\mathcal{T}}, \quad (3.7a)$$

$$\hat{\epsilon}_b^2 = \hat{\mathcal{T}}\hat{\epsilon}\hat{\mathcal{T}}\hat{\epsilon}\hat{\mathcal{T}}, \quad (3.7b)$$

където сме използвали некомутативните правила и сме отчели у-ние (3.4).

За да намерим уникално линейно решение, ние запазваме линейни членове, т.е. у-ние (3.6a). Нелинейните членове $\hat{\epsilon}_a^2$ и $\hat{\epsilon}_b^2$ могат да се разглеждат като грешки при последваща обработка; тяхното значение нараства квадратично с m . Този факт определя горна граница на броя гейтове, които можем да приложим, преди нашето решение да се отклони твърде много от действителното.

Като умножим у-ние (3.6a) с $\hat{\mathcal{T}}$ отляво и като вземем предвид у-ние (3.4), получаваме

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{R}}^{2m+1} - \mathcal{I} = (m+1)\hat{\mathcal{T}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + m\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\hat{\mathcal{T}}. \quad (3.8)$$

Това е уравнение на Силвестър,

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (3.9)$$

където

$$\mathbf{A} = (m+1)\hat{\mathcal{T}}, \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{B} = m\hat{\mathcal{T}}, \quad (3.10б)$$

$$\mathbf{C} = \hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{R}}^{2m+1} - \mathcal{I}, \quad (3.10в)$$

са известни матрици, тъй като $\hat{\mathcal{R}}^{2m+1}$ е намерена чрез SQPT.

Уравнение (3.9) има единствено решение за $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ само ако матриците \mathbf{A} и $-\mathbf{B}$ нямат обща собствена стойност. В нашия случай това условие винаги е изпълнено, защото $m+1 \neq -m$. Това означава, че чрез решаване на у-ние (3.9) можем да изчислим матрицата на грешките $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ и след това единичният процес $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{T}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$.

3.1.3 Линейна апроксимация за произволни целеви гейтове

Както за инволютивните целеви гейтове, продължаваме със същото линейно приближение, но за произволен целеви гейт. Чрез запазване само на линейните членове в $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, многоходовият процес $\hat{\mathcal{R}}^N$ приема формата

$$\hat{\mathcal{R}}^N \approx \hat{\mathcal{T}}^N + \hat{\mathcal{T}}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{\mathcal{T}}^{-s} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \hat{\mathcal{T}}^s. \quad (3.11)$$

Тук ние полагаме

$$\mathbf{E} = \sum_{s=0}^{N-1} \hat{\mathcal{T}}^{-s} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \hat{\mathcal{T}}^s, \quad (3.12)$$

където $\mathbf{E} = \hat{\mathcal{T}}^{1-N} \hat{\mathcal{R}}^N - \hat{\mathcal{T}}$ е известна матрица и нашата цел е да намерим матрицата на грешката $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ от дясната страна. Уравнение (3.12) е специален случай на общо разширено уравнение на Силвестър. Според Ref. [SC11] може да се реши числено за $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ чрез итерациите

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k + \mu \sum_{q=0}^{N-1} \hat{\mathcal{T}}^q \left(\mathbf{E} - \sum_{s=0}^{N-1} \hat{\mathcal{T}}^{-s} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \hat{\mathcal{T}}^s \right) \hat{\mathcal{T}}^{-q}, \quad (3.13)$$

където μ е коефициент на конвергенция, който контролира сходимостта на итеративния алгоритъм (3.13), който приема стойности в диапазона от $0 < \mu \ll 1$. По-големият μ води до по-малко повторения, но при над критична стойност на μ няма конвергенция на алгоритъма. Повече подробности за избора на μ могат да се намерят в Ref. [SC11]. В нашата демонстрация за еднокюбитови неинволютивни гейтове, ние избираме $\mu = 0,003$. Първоначалната матрица $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_0$ може да бъде всяка произволна матрица, имаща същото измерение като $\hat{\mathcal{T}}$.

3.1.4 Код на Python за намиране на матрицата на грешката $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$

Тук предоставяме кода, използван за извършване на изчислението за последваща обработка чрез решаване на уравнението $\hat{\mathcal{R}}^N = (\hat{\mathcal{T}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^N$, където $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ е матрицата на неизвестните грешки. Остана-

лите са известни – целевата матрица \hat{T} , общата PTM матрица $\hat{\mathcal{R}}^N$ и проходите $N = 2m + 1$, ($m = 1, 2, \dots$) за CNOT и $N = 4m + 1$, ($m = 1, 2, \dots$) за \sqrt{X} гейтове.

```
import numpy as np
def update_E(T, E, RN, N, alpha):
    """Update E based on the current difference delta."""
    RN_current = np.linalg.matrix_power(T, E, N)
    delta = RN - RN_current
    return E + alpha * delta

def find_E(T, RN, N, alpha=0.01, max_iterations=3000, tolerance=1e-12):
    """Iteratively find E such that (T + E)^N = M."""
    E = np.zeros_like(T) # Initial guess for E
    for _ in range(max_iterations):
        E = update_E(T, E, RN, N, alpha)
        if np.linalg.norm(np.linalg.matrix_power(T, E, N) - RN) < tolerance:
            break
    return E
```

3.2 Експериментална демонстрация на MQPT на реален квантов процесор IBMQ__MANILA

В този раздел ние демонстрираме MQPT експериментално на CNOT гейт, който е основен двукюбитов гейт на IBMQ__MANILA процесор [IBM23] и го сравняваме с резултатите от SQPT. За да подобрим качеството на SQPT, ние използваме модула Qiskit MITIGATEDPROCESS TOMOGRAPHY, който смекчава рийдаут грешката. Този модул включва две допълнителни вериги към обикновените 144 SQPT вериги, които са в модула PROCESS TOMOGRAPHY.

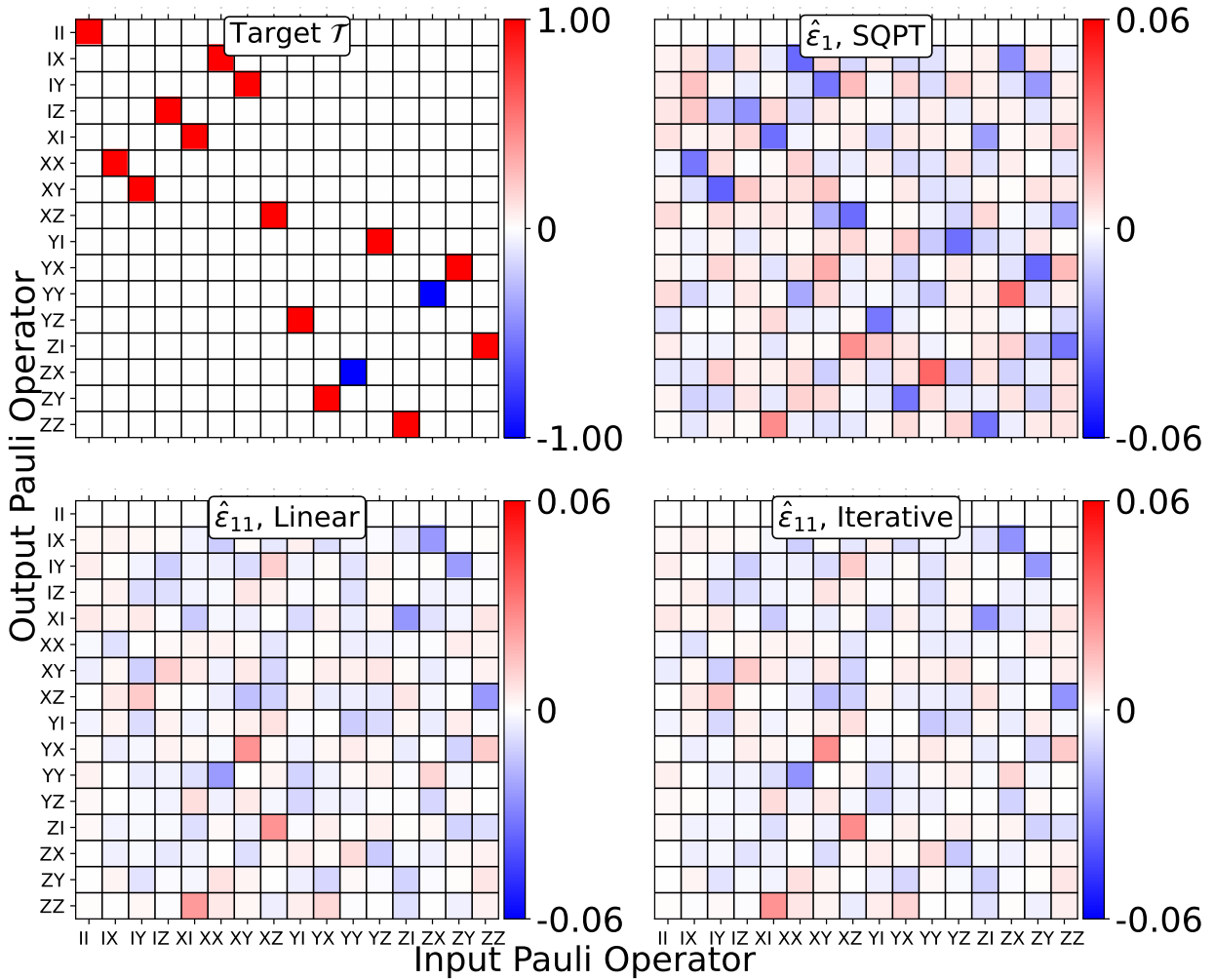
В IBM Qiskit изходът от томографията посредством модула PROCESS TOMOGRAPHY се дава чрез измерената матрица на Чой (Choi) $\hat{\mathcal{C}}$. В първия етап на MQPT, когато изпълняваме SQPT на N последователни гейта, имаме измерена матрица на Чой $\hat{\mathcal{C}}_N^{(N)}$, която преобразуваме в съответния PTM $\hat{\mathcal{R}}_N^N$ с трансформацията

$$\left(\hat{\mathcal{R}}_N^N\right)_{i,j} = \frac{1}{d} \text{Tr} \left[\hat{\mathcal{C}}_N^{(N)} \hat{P}_j^T \otimes \hat{P}_i \right]. \tag{3.14}$$

Впоследствие, в процедурата за последваща обработка на MQPT, след като сме измерили \mathcal{R}_N^N и знаейки \hat{T} и N , ние определяме матрицата на грешката $\hat{\epsilon}_N$ и единичен процес $\hat{\mathcal{R}}_N = \hat{T} + \hat{\epsilon}_N$. Долния индекс $\hat{\mathcal{R}}_N$ означава при какъв вид томография е намерена съответната матрица (за SQPT $N = 1$; за MQPT $N > 1$), а горния индекс показва дали процеса е единичен или мултипроцес.

Изпълнени са SQPT с $N = 1$ и MQPT с $N = 11$ процеса (паса). Както за SQPT, така и за MQPT са проведени 10 томографии с $n_S = 4000$ шота. CNOT, който характеризираме в експерименталната демонстрация, има най-малко значим бит (LSB) като контролен кубит, т.е. cx(0,1). Съгласно конвенцията на IBM Qiskit LSB, съответният 4×4 целеви гейт е представен от

$$T_{\text{cnot}} \equiv \begin{array}{c} q_0 \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ q_1 \text{---} \oplus \text{---} \end{array} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \text{cx}(0,1) \tag{3.15}$$

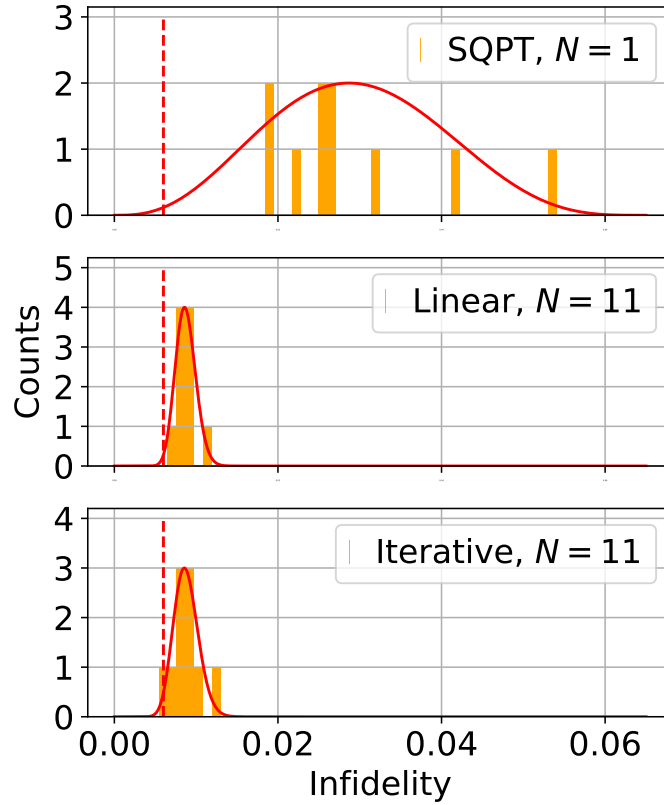


Фигура 3.2: Експериментална демонстрация на IBMQ_MANILA. Горевляво - CNOT/сх(0,1)/ PTM целева матрица ; Горевдясно - Измерена матрица на грешка $\hat{\epsilon}_1$ от SQPT ($N = 1$); отдолувляво - MQPT $\hat{\epsilon}_{11}$ с линейния метод; долувдясно - MQPT $\hat{\epsilon}_{11}$ с итеративния метод при $N = 11$. Всички матрици на грешки са осреднени за десет томографии, извършени с модула Qiskit MITIGATEDPROCESS TOMOGRAPHY.

Съответната целева PTM матрица е показана на фиг. 3.2 (горе вляво), а измерената матрицата на грешката $\hat{\epsilon}_1$ от SQPT е на фиг. 3.2 (горе вдясно). На долния ред на Фиг. 3.2 представяме измерената матрица на грешката $\hat{\epsilon}_{11}$ от MQPT с линейния и итеративен метод. Както SQPT, така и MQPT матриците са осреднени за 10 томографии.

На Фиг. 3.3 показваме резултатите за разпределението на инфиделити, извършено с 10 томографии за SQPT и MQPT (линейни и итеративни методи). Като референтни данни за измерването, ние използваме данните за калибриране на IBM, които определят CNOT средна гейт грешка (инфиделити) от 6×10^{-3} , отбелязана с червена пунктирна линия. Както в симулациите в предходния раздел, SQPT надценява грешките (поради некомпенсирани измервателни грешки), докато и двата метода MQPT дават значително по-ниски (и подобни една на друга) стойности. Забелязваме значителни подобрения на прецизността и точността, тъй като MQPT разпределението е много по-близо до точното инфиделити (с червена пунктирна линия), отколкото SQPT.

Ние също сравнихме получения резултат с директно измерени данни от независим експерименти и които данни не разчитат на средната точност от данните за калибриране на IBM. За тази цел проведохме серия от измервания на популациите $p_{ij}(M)$ на четирите основни състояния



Фигура 3.3: CNOT разпределение на инфиделити след SQPT и MQPT (линеен и итеративен) с $N = 11$ на IBM Quantum IBMQ_MANILA. Десет експеримента са проведени с помощта на модула Qiskit MITIGATEDPROCESS TOMOGRAPHY, всеки с $n_s = 4k$ шотове. Средната неточност (infidelity) е взета от данните на IBM Quantum Calibration (червено пунктирано). Бета кривите (червени плътни линии) представляват приближения на разпределения на неточност за SQPT и MQPT.

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, чрез прилагане на същите CNOT гейтове многократно ($M = 1, 2, \dots, 100$). Тези директно измерени вероятности са изобразени на Фиг. 3.4, маркирани с червени точки. Това измерване може да се сравни с резултатите от нашите измерени процеси $\hat{\mathcal{R}}_N$ за SQPT ($N = 1$) и MQPT ($N = 11$). За да демонстрираме *индиректните* резултати, преобразуваме измерените трансферни матрици на Паули в матрици на Лиувил, т.е. $\hat{\mathcal{R}}_N \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_N$. След това степенуваме тези матрици на различни степени на M и ги прилагаме към първоначалното векторизирано (чрез подреждане на колони) състояние $|\hat{\rho}_0\rangle\rangle = |00\rangle\rangle$. Така косвено измерените вероятности $p_{ij}(N, M)$ се получават като

$$p_{00}(N, M) = \left(\hat{\mathcal{S}}_N^M |00\rangle\rangle \right)_1, \quad (3.16a)$$

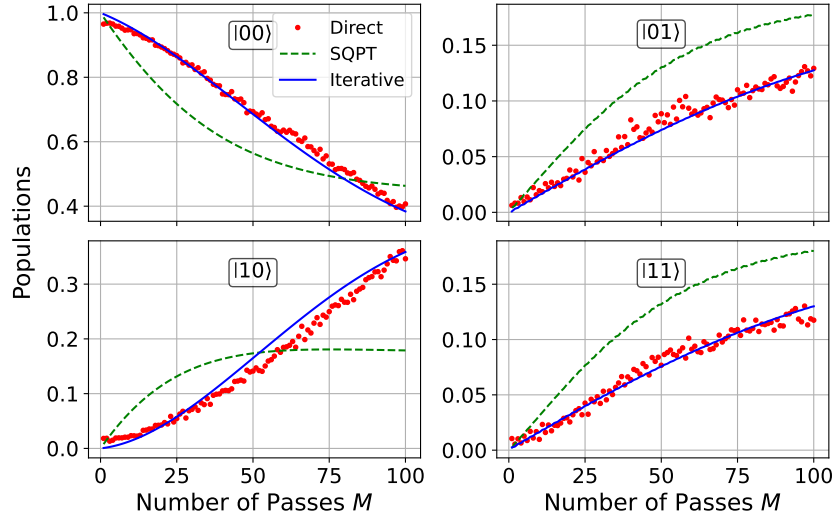
$$p_{01}(N, M) = \left(\hat{\mathcal{S}}_N^M |00\rangle\rangle \right)_6, \quad (3.16б)$$

$$p_{10}(N, M) = \left(\hat{\mathcal{S}}_N^M |00\rangle\rangle \right)_{11}, \quad (3.16в)$$

$$p_{11}(N, M) = \left(\hat{\mathcal{S}}_N^M |00\rangle\rangle \right)_{16}, \quad (3.16г)$$

където индексите 1, 6, 11, 16 означават индекса на получените векторни елементи, които съответстват на популациите на четирите базисни състояния $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$.

Косвените вероятности за четирите основни състояния, определени от SQPT, са илюстрирани на Фиг. 3.4 с пунктирани линии. Те са забележимо различни от директно измерения набор, което



Фигура 3.4: Директно и изчислено сравнение на вероятностите за SQPT и MQPT (Линеен метод) - Експериментална демонстрация на IBM quantum `ibmq_manila`. Директно измерени вероятности на базовите състояния (червени точки) се измерват след прилагане на CNOT gate M пъти върху първоначалното състояние $|00\rangle$ при $n_S = 4k$. Непреките вероятности (пунктирани линии) се изчисляват чрез осреднените SQPT и MQPT процеси чрез супероператорите \hat{S}_1 ($N = 1$) и \hat{S}_{11} ($N = 11$). След това този процес се повишава на степен различни M и се прилага към векторизираното начално състояние $|\hat{\rho}_0\rangle = |00\rangle$, т.е. вероятностите се изчисляват от вектора $\hat{S}_N^M |00\rangle$ според у-ние (3.16).

се дължи на значителните неточности в SQPT, произтичащи от SPAM, рийдаут и статистически грешки.

Кривите, произтичащи от MQPT използвайки осреднената матрица на Лиувил \hat{S}_{11}^M също са представени. Те следват съответните криви за директното измерване на вероятността много по-близко, предоставяйки допълнително доказателство, че MQPT значително подобрява качеството на томографията.

3.3 Симулация на MQPT

Симулациите, обсъдени в този раздел, са извършени с `qasm_simulator`, който е част от софтуерна платформа Qiskit за квантови изчисления на IBM с отворен сорс [con23].

3.3.1 Описание на симулацията

За да изследваме прецизността и точността на предложения метод и способността му да идентифицира индивидуални елементи на матрицата на грешките, ние избрахме симулационен подход. Този избор се дължи на факта, че в симулациите ние сме в състояние предварително да знаем действителния процес, който искаме да характеризираме, и да го използваме като референция. За да получим надеждна статистика, ние прилагаме итеративния метод към диамантената норма, като извършваме 50 томографии за различни пасове N и брой шотове n_S . Ние извършваме такива симулации на два базови квантови гейта — еднокюбитен \sqrt{X} и двукюбитен CNOT. С цел да не се увеличава прекалено обема на настоящия автореферат, тук са предоставени данни от симулацията на двукюбитния CNOT. Данните за симулацията на MQPT на \sqrt{X} гейт, могат да се видят в самата дисертация, както и в Ref. [SV24b]. И за двата гейта имаме предварително генерирани

PTM матрици $\hat{\mathcal{R}}$, които имат подобни гейт неточности като на съответните реални квантови процесори на IBM Quantum. PTM бяха генерирани с помощта на програмата за решаване на масъров уравнение MESOLVE на Qutip [JNN13] с включването на колапс оператори и унитарни грешки, които са избрани на случаен принцип.

За симулация на измерване е необходимо също така да се симулират грешките при измерване — SPAM, рийдаут, статистически шум. Що се отнася до матрицата на гейт грешките, грешките на измерване се избират, като се вземат предвид типичните стойности за настоящите реални процесори IBM Quantum. В нашия модел СПАМ грешката се въвежда от така наречения „шумов модел“ [cona]. Грешката в SPAM се моделира само за \sqrt{X} гейт, тъй като това е единствения несъвършен еднокюбитов гейт, който се използва в SPAM. Фазовите гейтове, които също са основни и се използват в СПАМ, са практически перфектни поради използването на така наречената техника за промяна на рамката (Frame change) [McK+17]. Приемаме типична SPAM грешка (infidelity) от 2×10^{-4} за \sqrt{X} гейт, и правим настройка на рийдаут грешката на 3×10^{-3} . Отбелязваме, че в действителност рийдаут грешката може да бъде по-голяма от порядъка на 10^{-2} ; ние обаче предполагаем, че също така сме изпълнили предварително така наречената техника за „смекчаване на рийдаут“ (readout mitigation) [conb]. Тази техника е широко използвана и е достъпна в Qiskit в модула MITIGATEDPROCESS TOMOGRAPHY. Въпреки това тази техника не може напълно да смекчи рийдаут грешката и остава по-малка, но все пак значителна част. Статистическата грешка (shot noise error), която е пропорционална на $1/\sqrt{n_s}$, се въвежда автоматично при указване на броя на шотовете n_s в модула Qiskit PROCESS TOMOGRAPHY. В симулацията, обсъдена в този раздел, използваме различен брой шотовете $n_s = 4k, 10k, 40k, 100k$ и т.н., където за простота означаваме $k = 10^3$ по-нататък.

Тъй като в симулацията знаем действителната грешка $\hat{\epsilon}$, можем да визуализираме подобрението на прецизността и точността, като използваме диамантените норми на матрицата на измерената грешка $\|\hat{\epsilon}_N\|_{\diamond}$ и разликата между измерени и действителни матрици на грешки $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_{\diamond}$.

3.3.2 MQPT симулация на CNOT гейт

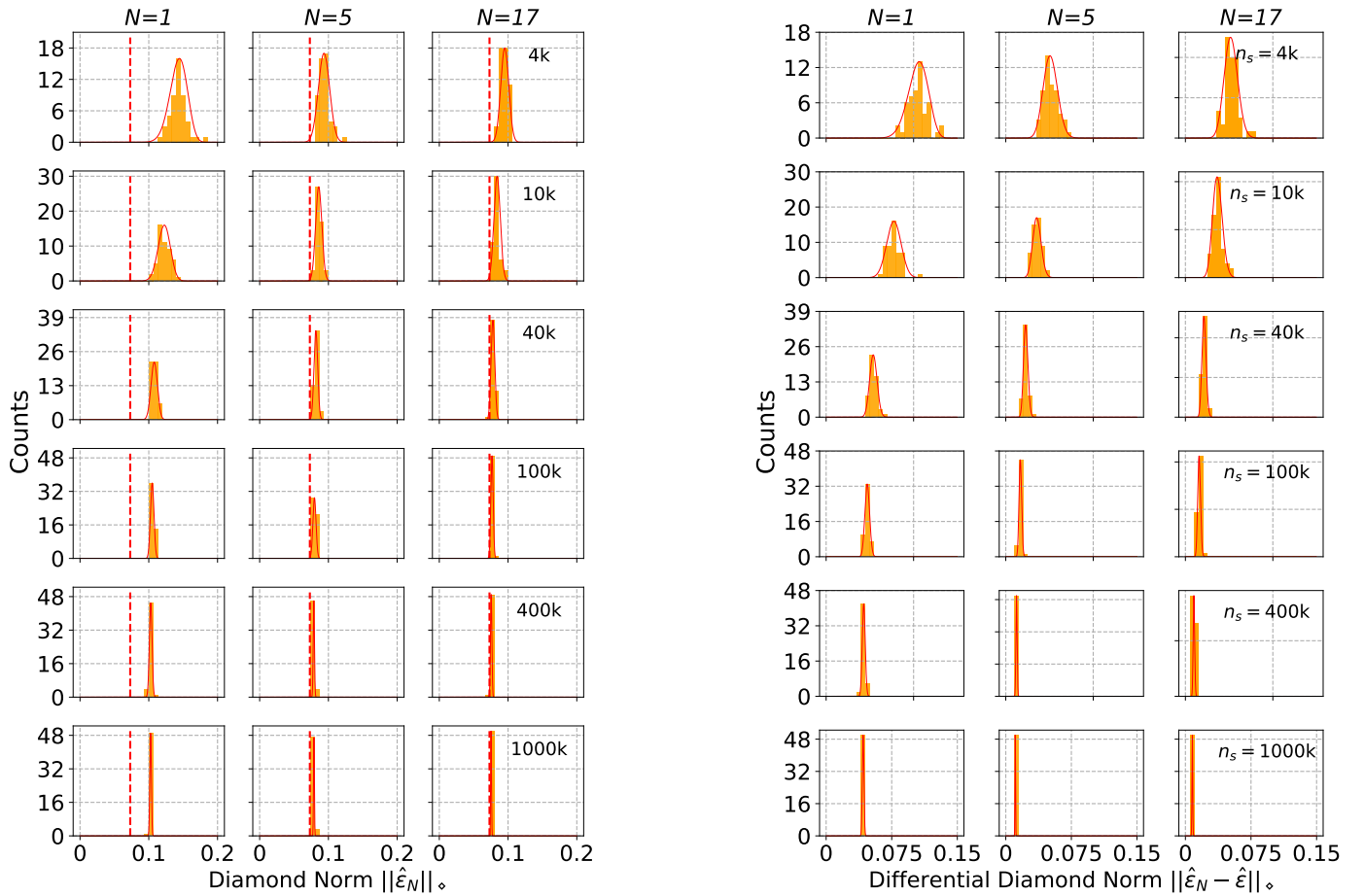
Тук представяме накратко резултатите от MQPT симулация на CNOT, който е основен гейт в процесорите IBM Quantum. Данните от симулациите за \sqrt{X} гейт са показани в дисертацията.

Симулациите са проведени при $N = 4m + 1$, където $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Тъй като всеки експеримент има статистическа грешка, използваме n_s шотовете, за да варираме тази грешка. В симулациите са използвани $n_s = 4k$ до $1000k$.

За всяка комбинация от N и n_s , са изпълнени 50 томографии, последвани от прилагане на итеративния метод с някои сравнения с линейния. Всяка от 50-те томографии има своя собствена статистическа грешка и затова тяхното разпределение е представено в хистограми. Използваме несъвършен CNOT гейт с диамантена норма $\|\hat{\epsilon}\|_{\diamond} = 0,073$, и инфиделити $e_F = 0,0062$.

Изследваме разпределенията на диамантената норма за CNOT, за да оценим прецизността и точността на нашия MQPT подход. Диамантените норми $\|\hat{\epsilon}_N\|_{\diamond}$ и $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_{\diamond}$, изчислени с итеративния метод, са нанесени на фиг. 3.5. Дясната страна на графиките, показва нормата на разликата $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_{\diamond}$ между измерената $\hat{\epsilon}_N$ и действителната $\hat{\epsilon}$ матрици за грешки. Това е недвусмислената мярка за успех или неуспех на симулацията, тъй като различните измерени матрици $\hat{\epsilon}_N$ може да имат една и съща диамантена норма $\|\hat{\epsilon}_N\|_{\diamond}$, но може да са далеч от действителната матрица на грешката $\hat{\epsilon}$.

Фигура 3.5 демонстрира, че с увеличаването на броя на процесите N разпределението става както по-прецизно (ширината му се свива), така и по-точно (приближава се до вертикалната пунктирна линия, която показва действителната грешка, произтичаща от генерираната матрица

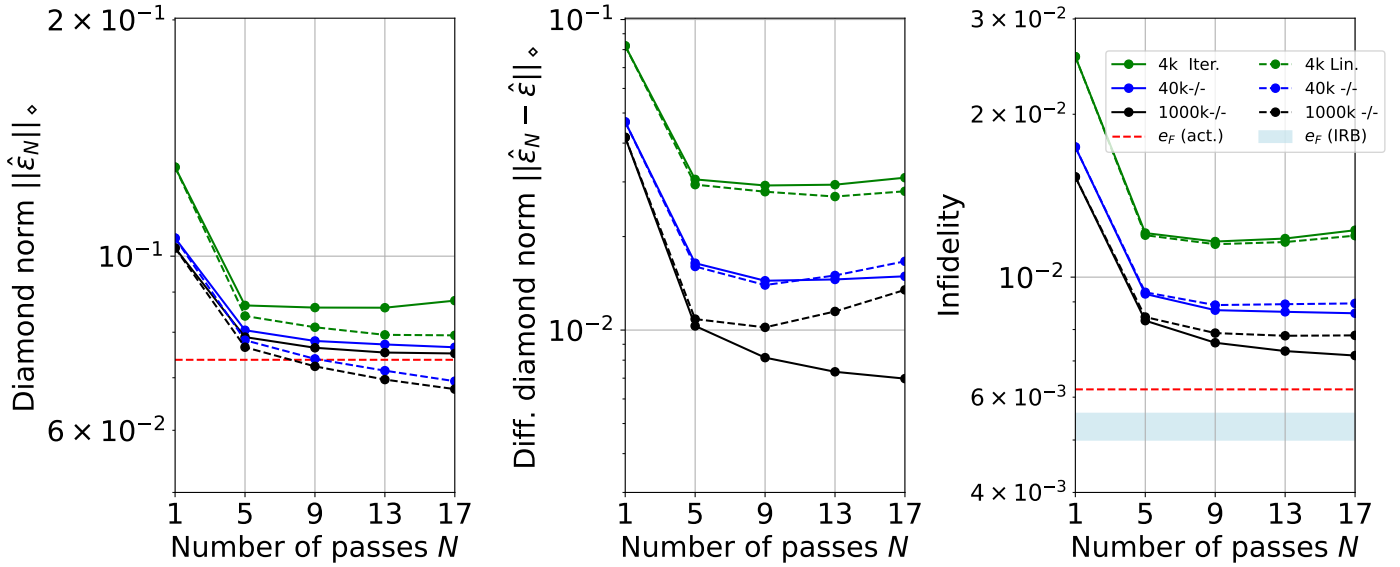


Фигура 3.5: Разпределение на диамантената норма $\|\hat{\epsilon}_N\|_\diamond$ (вляво) и диференциалната диамантена норма $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_\diamond$ (вдясно) за CNOT гейт за различен брой процеси (пасове) $N = 4m + 1$ и брой шотове n_S , изчислени с помощта на итеративния MQPT метод. Хистограмите показват резултатите от 50 различни симулации, за да се получи надеждна статистика, свързана с ограничения брой шотове n_S . Плътните червени криви показват съответствието на Бета разпределението с данните. Прекъснатата линия в лявата матрица на графиките показва действителната стойност на нормата на грешката.

на грешката $\hat{\epsilon}$). От друга страна, когато увеличим броя на шотовете n_S и следователно намалим статистическата грешка, прецизността се увеличава (според статистическия закон за квадратен корен), но промяната в точността зависи от броя на използваните процеси (пасове): бързо се насища за 1 пас, докато за 5 и 17 паса разпределението се движи стабилно към пунктираната линия (действителната грешка).

Причината е, че SPAM и грешките при четене изместват еднопроходните симулации, докато тези грешки са значително намалени от многопроходния подход. Тази симулация ясно представя подобренията както в прецизността, така и в точността с MQPT метода.

Фиг. 3.6 представя сравнение на диамантените норми на CNOT гейт, изчислени чрез линейния и итеративния MQPT метод. Това е тест за това как се представят двата метода един спрямо друг. За 4k шотове, линейният метод дава по-добра точност от итеративния метод. Въпреки това, когато броят на шотовете надвиши 40k, тенденцията се обръща, като итеративните норми стават по-точни. Това предполага, че при по-висок брой шотове, итеративният метод по-ефективно смекчава измервателните грешки. Освен това при 40k и 1000k шотове има монотонно намаляване на



Фигура 3.6: Сравнение на итеративните MQPT (плътни линии), линейните MQPT (пунктирните линии) и методите на Interleaved рандомизиран бенчмаркинг (IRB, лента), приложени към CNOT гейт. Сравнение на диамантената норма $\|\hat{\epsilon}_N\|_\diamond$ (вляво), диференциалната диамантена норма $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_\diamond$ (в средата) и инфиделити (вдясно) за няколко N и различни шотове n_S . Действителното инфиделити e_F е показана с хоризонталната пунктирана линия в левия и десния график са действителна стойност. Действителната стойност в средната диаграма е 0.

итеративните норми, тъй като броят на пасовете N се увеличава, което допълнително подчертава предимството на итеративния метод в режима на много шотове.

Важно е да се отбележи, че диамантената норма $\|\hat{\epsilon}_N\|_\diamond$, изчислена по линейния метод за 40k и 1000k шота, пресича линията на действителната норма $\hat{\epsilon}$ за повече от 9 паса, т.е. подценява грешката (ляв график). Обратно, итеративният метод асимптотично се доближава до действителната норма $\hat{\epsilon}$ с увеличаване на броя на преминаванията N . Това наблюдение не се забелязва в диференциалната диамантена норма $\|\hat{\epsilon}_N - \hat{\epsilon}\|_\diamond$ (среден график), което е по-добра мярка за ефективността на методите.

Фигура 3.6 (вдясно) показва инфиделити на CNOT, където действителното инфиделити се сравнява с тези, изчислени чрез линейните и итеративните MQPT методи и IRB метода. Инфиделити, симулирано от IRB, е по-точно от MQPT за малък брой пасове N и шотове n_S , но за по-големи стойности на N и n_S методът MQPT се характеризира с подобна точност като IRB. Въпреки че IRB предлага ясна и сравнително точна оценка на e_F , тя дава само едно число и не дава много по-обширната информация за действителната матрица на грешката $\hat{\epsilon}$: това е, което MQPT доставя.

Глава 4

Кохерентно взаимодействие на квантови системи с поредица от импулси

В тази глава представяме точни аналитични формули, които описват взаимодействието на квантови системи с много състояния, притежаващи динамичните симетрии на Вигнер-Майорана и Морис-Шор с поредица от импулси. Тази поредица може да се разглежда като повтарящи се взаимодействия на квантовата система с едно и същото поле и следователно общият пропагатор се изразява като матричната степен на единичния пропагатор.

Поради тези симетрии, динамиката на много състояния се характеризира с присъщи характеристики на две състояния, описани от една или повече двойки комплексни параметри на Cayley-Klein. Това улеснява извеждането на изрични формули, свързващи еднопроцесните и мултипроцесните пропагатори. Наличието на такива аналитични връзки отваря перспективите за разнообразие от приложения с ансамбли от кубити, кютрити и като цяло кюдити, например аналитично описание на кохерентни взаимодействия, импулсен-влак, кохерентно усилване на грешки на квантовите гейтове за точна томография на квантовите гейтове, динамично префазиране на нехомогенно разширени ансамбли, измерване на малки електрически или магнитни полета и др.

4.1 Въведение

Квантовите системи с множество състояния, каквито се срещат в реалните физически системи, обикновено са трудни за аналитично третиране поради тяхната непосилно сложна динамика [Sho90; Sho11]. И все пак, някои от тях позволяват такова третиране благодарение на вътрешното поведение на две състояния. Един пример е ситуацията, когато всички състояния с изключение на две са далеч от резонанс с което и да е от контролните полета; тогава адиабатното елиминиране на всички тези състояния ни оставя с ефективна система с две състояния и ефектът на другите състояния се проявява като промени на ас Stark в разстройката [Sho90; Sho11]. Интересно е, че модифицирано адиабатно елиминиране може да бъде извършено дори когато състоянието на далечния резонанс е смекчено до близко до резонансно [TV12].

Друг пример намираме в системи със симетрия на Морис-Шор [MS83], в които всички състояния могат да бъдат групирани в две многообразия, така че взаимодействията са разрешени само между състояния на различни многообразия, но не и в рамките на едно и също многообразие. Всички свързвания трябва да споделят една и съща времева зависимост. Нещо повече, всички състояния в рамките на едно и също многообразие трябва да бъдат изродени (в приближението на въртящата се вълна), но може да има ненулев детюнинг между състояния от различни многообразия; обаче трябва да е еднакъв за всички куплунги. Трансформацията на Морис-Шор превръща такива системи с множество състояния в набор от независими системи с две състояния и редица отделени (тъмни) единични състояния. Такива връзки възникват естествено, например при взаимодействието на две изродени атомни нива с елиптично поляризирано лазерно поле [Sho90; Sho11; Vit00; VKS03; Kis+04; KVS07; Kim+15; Kir+17; Fin+19]. Трансформацията на Морис-Шор е обобщена до произволни многообразия от изродени състояния [RVS06] и нейните разширения и приложения са прегледани от Шор [Sho14]. Наскоро тази трансформация беше обобщена до неравномерни разстройки [ZVV20] и различни времеви зависимости на връзките [ZRV22].

Трети пример за редуцируема динамика с множество състояния имаме в системи със симетрия $SU(2)$ на Wigner-Majorana [Wig31; Maj32]. Възниква, например, при (радиочестотни) преходи между магнитните поднива на ниво с определен ъглов импулс, като например в изходните съединители на Бозе-Айнщайн [CS79; VS97]. Естествено се появява и в раманови системи, подложени на комбинирано външно лазерно поле и статично магнитно поле [Ran+18].

Докато адиабатното елиминиране е приблизителен метод, другите два метода представят по принцип точно редуциране на системите с много състояния до една или повече системи с две състояния. Това намаление позволява да се използват методите за квантов контрол с две състояния за проектиране на подобни методи в системи с много състояния [VS97; AE75; Ran+18].

В тази работа ние използваме тези аналогии между системи с две състояния и системи с множество състояния, за да опишем аналитично взаимодействието на система с множество състояния със симетрията на Wigner-Majorana или Morris-Shore с поредица от идентични импулси, разглеждани като мултипроцесно взаимодействие на системата със същото поле. Ние извеждаме ясни аналитични формули, които изразяват цялостния мултипроцесен пропагатор по отношение на едноимпулсния пропагатор. В допълнение към очевидното приложение на използването на тези резултати за разработване на аналитични модели на многоимпулсно възбуждане на системи с множество състояния, те представят рамката за разработване на прецизна квантова томография на такива системи чрез кохерентно усилване на грешката поради многократното прилагане на един и същ квантов гейт. Те също така позволяват точно описание на динамично отделяне и квантово отчитане с кюдити.

4.2 Казуси

Разглеждаме кохерентна квантова система с K състояния, управлявани от поредица от N идентични импулси с продължителност T . Еволюцията на системата се управлява от време-зависещото уравнение на Шрьодингер ($\hbar = 1$),

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = \mathbf{H}(t) \Psi(t). \quad (4.1)$$

Еволюцията на вектора на състоянието $\Psi(t)$ може да бъде описана от пропагатора $\mathbf{U}(t, t_0)$ като

$$\Psi(t) = \mathbf{U}(t, t_0) \Psi(t_0). \quad (4.2)$$

Без загуба на общоприетост приемаме $t_0 = 0$. Ако хамилтонианът $\mathbf{H}(t)$ има една и съща форма за всеки времеви интервал $[(n-1)T, nT]$ ($n = 1, 2, \dots, N$), през който n -тият импулс действа, тогава пропагаторът, генериран от всеки импулс, ще бъде един и същ, т.е. $\mathbf{U}((n-1)T, nT) = \mathbf{U}(T, 0)$. Тогава ще имаме

$$\mathbf{U}(NT, 0) \equiv [\mathbf{U}(T, 0)]^N. \quad (4.3)$$

Искаме да намерим N -импулсния пропагатор $\mathbf{U}(NT, 0)$ по отношение на параметрите на $\mathbf{U}(T, 0)$. Този проблем е решен за система с две състояния [VK95] и ние ще използваме и надграждаме тези резултати тук.

Динамиката на квантова система с две състояния се управлява от Хамилтониан

$$\mathbf{H}_2(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\Delta(t) & \Omega(t) \\ \Omega^*(t) & \Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

където детюннга $\Delta(t)$ и честотата на Раби $\Omega(t)$ са произволни функции на времето. Тъй като избрахме да изразим Хамилтониана в безследова форма (4.4), пропагаторът има $SU(2)$ динамична

симетрия,

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

където a и b са два комплексни параметъра на Кейли-Клайн, удовлетворяващи условието $|a|^2 + |b|^2 = 1$; следователно $\det \mathbf{U}_2 = 1$. Доказано е [VK95] че N -тата степен на пропагатора $SU(2)$ 4.5 е

$$\mathbf{U}_2^N = \begin{bmatrix} a_N & b_N \\ -b_N^* & a_N^* \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

където

$$a_N = \cos(N\theta) + i \frac{\sin(N\theta)}{\sin \theta} \operatorname{Im} a, \quad (4.7a)$$

$$b_N = b \frac{\sin(N\theta)}{\sin \theta}, \quad (4.7b)$$

$$\cos \theta = \operatorname{Re} a. \quad (4.7b)$$

Отношенията (4.7) позволяват да се открие как импулсната поредица влияе на системата с две състояния, ако знаем действието на единичен импулс. Съществуват редица аналитични едноимпулсни решения, които могат да бъдат обобщени с помощта на формулите по-горе до аналитични многоимпулсни решения [VK95]. Тези отношения също така позволяват точно описание на динамичното отделяне, което използва многократно прилагане на един и същ (обикновено π) импулс [CP54; MG58] или повторение на специфична последователност от импулси [SÁS12]. От друга страна, тези отношения позволяват точно да се установи действието на единичен импулс от действието на поредица от импулси. Това е важно, например, за измерване на малки отклонения от желаното едноимпулсно действие, например за характеризиране на квантов гейт с високо фиделити [Vit20], за който допустимата грешка е от порядъка на 10^{-3} или по-малко. Има приложения и при измерване на малки честотни измествания, необходими при квантов сензинг [Vit21].

Кейли-Клайн параметрите a и b очевидно зависят от $\Delta(t)$ и $\Omega(t)$, т.е. от модела. Има няколко аналитично разрешими модела, за които a и b имат точни изрази, напр. моделите на Раби [Rab37], Landau-Majorana-Stückelberg-Zener [Lan32; Zen32; Maj32; Stü32], Rosen-Zener [RZ32], Demkov [Dem64], Nikitin [Nik62], Allen-Eberly-Hioe [AE75; Hio84; SJH85], Vambini-Berman [BB81], Demkov-Kunike [YM69; HC85; Zak85] и др.. Най-общо ние разглеждаме случая на произволни $\Delta(t)$ и $\Omega(t)$, което означава произволни параметри a и b . В настоящата работа се интересуваме от връзките между еднопроцесните параметри a и b и мултипроцесните параметри a_N и b_N . Важно е тези отношения да не зависят от конкретните изрази на a и b и следователно да не са ограничени до определен модел. Досега такива отношения от едно преминаване към много преминаване са били известни само за система с две състояния. Тук ние разширяваме тези резултати до системи с много състояния, притежаващи симетриите на Вигнер-Майорана или Морис-Шор, които могат да бъдат сведени до една или повече системи с две състояния.

- **Вигнер-Майорана (WM) симетрия.** Изпълнява изискванията на WM декомпозиция [Wig31; Maj32], като има редуцируема динамична симетрия от $SU(K)$ до $SU(2)$ [Wig31; Maj32; BR45; Sal55; Hio87].
- **Морис-Шор (MS) симетрия.** Морис-Шор Хамилтонианът изпълнява изискванията на разлагането на MS [MS83; RVS06; KV06; ZVV20], за които квантовата система е съставена от набор от L основни изродени състояния и набор от M възбудени изродени състояния. Връзки съществуват само между състояния от различни групи, но не и в рамките на една

и съща група. Такава система може да се сведе до набор от M независими системи с две състояния и $M - L$ отделени (тъмни) състояния.

По-долу разглеждаме първо множеството взаимодействия на системи с много състояния с WM симетрия, а след това системи с MS симетрия. След подробното изследване на тези два типа системи, ще изследваме системи, които притежават както WM, така и MS симетрии.

4.3 Системи със симетрия на Вигнер-Майорана

4.3.1 Пропагатор на Вигнер-Майорана

Разлагането на WM е представено в няколко статии [Wig31; Maj32; BR45; Sal55; Hio87; Ran+18]. Произлиза от теорията на ротационните групи за ъгловия момент. Хамилтонианът има тридиагонална форма [Hio87]

$$\mathbf{H}_K = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H_{K-1,K-1} & H_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H_{K,K-1} & H_{KK} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

където ненулевите матрични елементи са

$$H_{kk}(t) = \left(k - \frac{K+1}{2}\right)\Delta(t), \quad (4.9a)$$

$$(k = 1, 2, \dots, K),$$

$$H_{k+1,k}(t) = H_{k,k+1}^*(t) = \frac{1}{2}\sqrt{k(K-k)}\Omega(t), \quad (4.9b)$$

$$(k = 1, 2, \dots, K-1).$$

По отношение на квантовите числа на ъгловия момент j и m имаме отношенията $K = 2j + 1$ and $k = j + 1 - m$.

Матричните елементи на WM пропагатора \mathbf{U}_K са [VW28; Wig31; Sal55; Hio87]

$$U_{kl} = \sum_r \frac{\sqrt{(k-1)!(l-1)!(K-k)!(K-l)!}}{(l-1-r)!(K-k-r)!(r-l+k)!r!} \times a^{K-k-r}(a^*)^{l-1-r}b^r(-b^*)^{r-l+k}, \quad (4.10)$$

където r преминава от r_{\min} до r_{\max} , с

$$r_{\min} = \min[0, k + l + 1 - K], \quad (4.11a)$$

$$r_{\max} = \max[k - 1, l - 1]. \quad (4.11b)$$

За $K = 2$ състояния, пропагаторът се редуцира до Eq. (4.5). Пропагаторите за $K = 3$ и $K = 4$

състояния са съответно

$$\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} a^2 & ab\sqrt{2} & b^2 \\ -ab^*\sqrt{2} & |a|^2 - |b|^2 & ba^*\sqrt{2} \\ b^{*2} & -a^*b^*\sqrt{2} & a^{*2} \end{bmatrix}, \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2b\sqrt{3} & ab^2\sqrt{3} & b^3 \\ -a^2b^*\sqrt{3} & a(|a|^2 - 2|b|^2) & b(2|a|^2 - |b|^2) & b^2a^*\sqrt{3} \\ ab^{*2}\sqrt{3} & b*(|b|^2 - 2|a|^2) & a*(|a|^2 - 2|b|^2) & ba^{*2}\sqrt{3} \\ -b^{*3} & a^*b^{*2}\sqrt{3} & -a^{*2}b^*\sqrt{3} & a^{*3} \end{bmatrix}. \quad (4.12b)$$

Тези матрици се наричат още D -матрици на Вигнер [Wig31]. През 1955 г. Salwen [Sal55] показва връзката между формулите на Вигнер и Майорана, като използва статията на Блох и Раби [BR45].

4.3.2 Многоимпулсен (Мултипроцесен) WM пропагатор

Ще изведем WM пропагатора на система с K -състояния след N повторения на взаимодействието, описано от Хамилтониана \mathbf{H}_K на Eq. (4.8) по два алтернативни начина. Първо ще използваме аналогията на K -състояния към динамиката на две състояния и след това ще я изведем чрез диагонализация на пропагатора \mathbf{U}_K .

Първи подход

При първия подход е важно да се отбележи, че параметрите a и b , параметризиращи пропагатора \mathbf{U}_K , са същите като параметрите в \mathbf{U}_2 на уравнение (4.5). С други думи, ако Хамилтонианът \mathbf{H}_2 на Eq. (4.4) генерира пропагатора \mathbf{U}_2 на Eq. (4.5), тогава Хамилтонианът \mathbf{H}_K на Eq. (4.8) генерира пропагатора \mathbf{U}_K с матричните елементи на Eq. (4.10). Изводът е, че можем да намерим пропагатора на система с K състояния с WM симетрия по два еквивалентни начина: (i) да решим уравнението на Шрьодингер с Жамилтониана на състоянието на K \mathbf{H}_K , или (ii) да решим проблема с две състояния с Хамилтониана \mathbf{H}_2 и използваме Eq. (4.10), за да намерим пропагатора \mathbf{U}_K . И в двата случая решенията трябва да са идентични. В този смисъл казваме, че симетрията на WM допуска редукция на система с K състояния до ефективна система с две състояния.

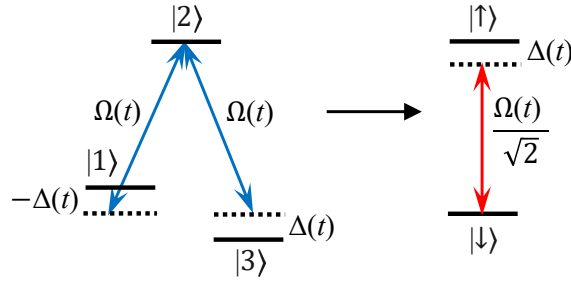
Сега да разгледаме поредица от множество импулси, всеки от които генерира един и същ пропагатор \mathbf{U}_K . По същите причини, дадени в предходния абзац, многоимпулсният (мултипроцесния) пропагатор за системата със състояния K , т.е. \mathbf{U}_K^N , може да бъде изчислен с помощта на този за системата с две състояния система, \mathbf{U}_2^N . По този начин заключаваме, че матричните елементи на N -процесния пропагатор за K -състояние WM система има същата форма като еднопроцесните пропагаторни елементи на уравнение (4.10),

$$U_{kl} = \sum_r \frac{\sqrt{(k-1)!(l-1)!(K-k)!(K-l)!}}{(l-1-r)!(K-k-r)!(r-l+k)!r!} \times a_N^{K-k-r} (a_N^*)^{l-1-r} b_N^r (-b_N^*)^{r-l+k}, \quad (4.13)$$

с a_N и b_N дадени уравнения (4.7), и r преминаващо от r_{\min} до r_{\max} дадени от уравнения (4.11).

Втори подход

При втория подход намираме мултипроцесния пропагатор \mathbf{U}_K^N чрез диагонализиране на еднопроцесния \mathbf{U}_K и използване на теорията на 3D ротационните групи [VW28]. Подробно извеждане е дадено в статията ни [SV23], както и в дисертацията.



Фигура 4.1: Декомпозиция на Wigner-Majorana за система Λ с три състояния, с еквивалентната система с две състояния.

Дискусия

Отношенията, получени тук между пропагаторните елементи на еднопроцесното и N -процесното взаимодействие на общата квантова система с K състояния с WM симетрия позволяват да се изпълняват два типа задачи: (i) предвид действието на единичното взаимодействие намира действието на повтарящите се множество взаимодействия и (ii) извежда действието на единичното взаимодействие чрез измерване на резултата от многократното повторение на това взаимодействие. Те могат да бъдат много полезни при проектирането на най-добрите сценарии за кохерентно усилване на грешките на квантови гейтове и следователно прецизна процесна томография както и за подобро квантово измерване на електрически и магнитни полета чрез усилване на честотните измествания [Vit21]. Наистина, наличието на точна аналитична връзка между единичните и мултипроцесите позволява точното определяне на малки грешки на гейта или честотни измествания от усилената грешка или изместване.

И накрая, посочваме, че във втория подход на извеждане сме използвали явната форма на диагонализиращата матрица \mathbf{V} , която е съставена от собствените вектори на WM пропагатора \mathbf{U} , като техните елементи се подчиняват на уравнения. (?). Този резултат може да бъде полезен сам по себе си, напр. за разработване на подходи за адиабатичен контрол [Vit+01; Vit+17], или така наречените “бързи пътища към адиабатичността” [Gué+19].

4.3.3 Примери: система с три нива

Пропагаторът \mathbf{U}_3 , показан в (4.12a), е конструиран от уравнението за матричните елементи U_{kl} на уравнение (4.10). Хамилтонианът се определя от u -ние (4.8) и е

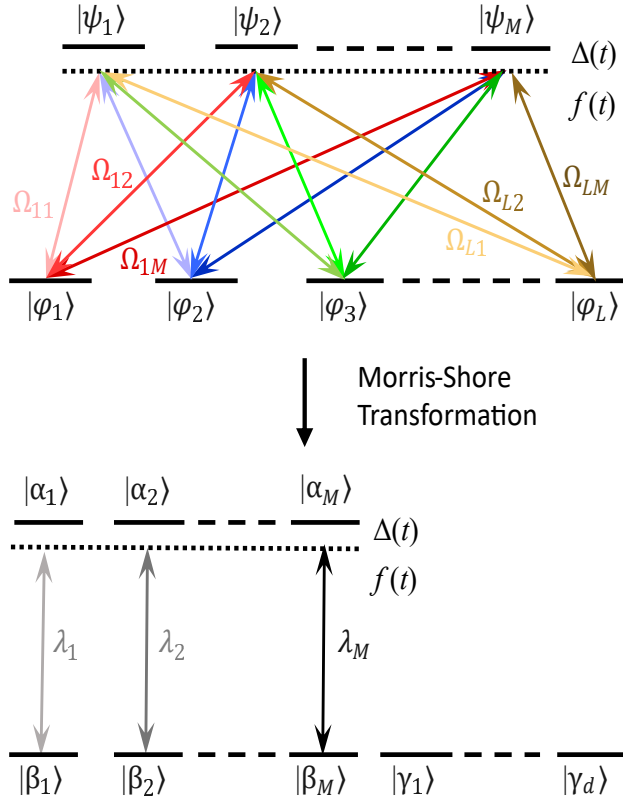
$$H_3(t) = \begin{bmatrix} -\Delta(t) & \frac{\Omega(t)}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\Omega^*(t)}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\Omega(t)}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\Omega^*(t)}{\sqrt{2}} & \Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

Системата е показана схематично на фиг. 4.1. Мултипроцесния пропагатор \mathbf{U}_3^N може да бъде получен от единичния \mathbf{U}_3 чрез заместване на $a \rightarrow a_N$ и $b \rightarrow b_N$ съгласно уравнение (4.7),

$$\mathbf{U}_3^N = \begin{bmatrix} a_N^2 & \sqrt{2}a_N b_N & b_N^2 \\ -\sqrt{2}a_N b_N^* & |a_N|^2 - |b_N|^2 & \sqrt{2}b_N a_N^* \\ b_N^{*2} & -\sqrt{2}a_N^* b_N^* & a_N^{*2} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Следователно вече за $K = 3$ състояния имаме квадратични степени в Cayley-Klein параметрите и това усилване е допълнително подсилено от прилагането на N взаимодействия.

Например, ако Cayley-Klein параметъра a е реален, тогава $a^2 = \cos^2 \theta$ е вероятността за липса



Фигура 4.2: Трансформацията на Морис-Шор. Система с много състояния, състояща се от два свързани набора от изродени нива, се трансформира в набор от M независими системи с две състояния и набор от $d = L - M$ отделени тъмни основни състояния. Всички куплунги имат еднаква зависимост от времето $f(t)$ и еднакви детюнинги $\Delta(t)$.

на преход и $p_2 = 1 - a^2 = \sin^2 \theta$ е вероятността за преход за едно преминаване в системата с две състояния. Вероятността за преминаване на N е

$$p_2^{(N)} = p_2 \frac{\sin^2 N\theta}{\sin^2 \theta} = \sin^2 N\theta. \quad (4.16)$$

Съответно, вероятността за преход в WM системата с три състояния от състояние 1 към състояние 3 е $p_3 = \sin^4 \theta$, а вероятността за преход на N -преминавания ще бъде

$$p_3^{(N)} = p_3 \frac{\sin^4 N\theta}{\sin^4 \theta} = \sin^4 N\theta. \quad (4.17)$$

Реално a възниква при резонансно възбуждане ($\Delta = 0$), а също и когато честотата на Раби е симетрична функция на времето, докато Δ е антисиметрична [Vit21].

Резултатите в този пример могат да се използват за ефективна томография на кютрит-ов гейт, както и за квантов сензинг с кютрити. Подобни отношения могат да се изведат и за по-голям брой състояния K .

4.4 Системи с Морис-Шор симетрия

4.4.1 Еднопроцесен MS Пропагатор

Трансформацията на Морис-Шор (MST) [MS83; RVS06; KV06; KVS07; ZVV20; Kis+04; Sho14] е мощен инструмент за редуциране на динамиката на определен клас системи с множество състояния до динамиката на една или повече системи с две състояния. MS системата е показана схематично на фиг. 5.1. Състои се от два набора от състояния: основен набор с L състояния и възбуден набор с M състояния. Има куплунги, количествено изразени от честотите на Раби $\Omega_{lm}f(t)$, само между състояния от различни нива ($l = 1, 2, \dots, L; m = 1, 2, \dots, M$), а $f(t)$ е обща зависимост от времето на всички куплинги. Всички куплинги имат еднакви детюнинги $\Delta(t)$. Хамилтонианът на системата MS може да бъде написан като

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_L & f(t)\mathbf{\Omega} \\ f(t)\mathbf{\Omega}^\dagger & \Delta(t)\mathbf{1}_M \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

където константната матрица $\mathbf{\Omega}$ е $L \times M$ размерна,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1M} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{L1} & \Omega_{L2} & \cdots & \Omega_{LM} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

и Ω_{lm} ($l = 1, 2, \dots, L; m = 1, 2, \dots, M$) са произволни комплексни константи. Трансформацията MS редуцира динамиката с много състояния, която има Хилбертова размерност $L + M$ [фиг. 5.1 (отгоре)] до набор от M независими системи с две състояния с допълнителни $d = L - M$ разкуплирани (тъмни) състояния [фиг. ?? (отдолу)]. В MS базиса, Хамилтонианът има формата на блокова матрица

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{H}(t) \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_L & f(t)\tilde{\mathbf{\Omega}} \\ f(t)\tilde{\mathbf{\Omega}}^\dagger & \Delta(t)\mathbf{1}_M \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

където \mathbf{S} е константна унитарна матрица, дефинирана от две квадратни унитарни матрици \mathbf{S}_L и \mathbf{S}_M с размерности съответно L и M ,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_L & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = \mathbf{1}_{(L+M)}. \quad (4.21)$$

След това, като се използват уравнения. (5.2) и (4.21), трансформираната куплираща матрица $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ може да бъде изразена като

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{S}_L \mathbf{\Omega} \mathbf{S}_M^\dagger \quad (4.22)$$

Матриците \mathbf{S}_L и \mathbf{S}_M се определят от условието, че диагонализират $\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega}$ and $\mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^\dagger$, т.е.

$$\mathbf{S}_L \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{S}_L^\dagger = \mathbf{1}_L, \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{S}_M \mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega} \mathbf{S}_M^\dagger = \mathbf{1}_M, \quad (4.23b)$$

и се намират чрез решаване на тези уравнения. M -мерната квадратна матрица $\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega}$ има най-общо M ненулеви собствени стойности λ_m^2 ($m = 1, 2, \dots, M$). L -мерната квадратна матрица $\mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^\dagger$ има същите M собствени стойности като $\mathbf{\Omega}^\dagger \mathbf{\Omega}$ и допълнителни $d = L - M$ нулеви собствени стойности, съответстващи на тъмните състояния.

Трансформираният Хамилтониан (5.2) придобива формата

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{d \times d} & \mathbf{O}_{d \times 2M} \\ \mathbf{O}_{2M \times d} & \tilde{\mathbf{H}}_c(t) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

където $\tilde{\mathbf{H}}_c(t)$ се образува от 4 квадратни $M \times M$ матрици,

$$\tilde{\mathbf{H}}_c(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}f(t) \\ \mathbf{\Lambda}f(t) & 2\Delta(t)\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

където

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

С подходящо пренареждане на състоянията (т.е. редовете и колоните), описани от матрица \mathbf{R} , $\tilde{\mathbf{H}}_c(t)$ може да бъде оформено в блоковата матрица $\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}_c(t)\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{H}}_b(t)$, with

$$\tilde{\mathbf{H}}_b(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}}_2(t) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{H}}_M(t) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

с

$$\tilde{\mathbf{H}}_m(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_m f(t) \\ \lambda_m f(t) & 2\Delta(t) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

който е Хамилтонианът, описващ m -та независима система с две състояния в MS базиса.

Всеки от тези M независими Хамилтониани с две състояния генерира M независими пропагатори с две състояния с M различни двойки Cayley-Klein параметри a_m и b_m ,

$$\tilde{\mathbf{U}}_m = \begin{bmatrix} a_m & b_m \\ -b_m^* e^{-i\delta} & a_m^* e^{-i\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

където $|a_m|^2 + |b_m|^2 = 1$ и

$$\delta = \int_0^T \Delta(t) dt \quad (4.30)$$

е обща натрупана фаза за всички M независими системи. Пропагаторът в пренаредения MS базис има същата блокова матрична структура като $\tilde{\mathbf{H}}_b(t)$,

$$\tilde{\mathbf{U}}_b = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{U}}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{U}}_M \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

След операцията за пренареждане $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}}_b\mathbf{R}^{-1} = \tilde{\mathbf{U}}_c$ намираме пропагатора на пълната система в

MS базиса в блокова матрична форма от четири $M \times M$ квадратни матрици,

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{d \times d} & \mathbf{O}_{d \times 2M} \\ \mathbf{O}_{2M \times d} & \tilde{\mathbf{U}}_c \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

където

$$\tilde{\mathbf{U}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^* e^{-i\delta} & \mathbf{A}^* e^{-i\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

с

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_M \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Оригиналният пропагатор се подчинява на същата трансформация като оригиналния Хамилтониан,

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S}^\dagger. \quad (4.35)$$

4.4.2 Мултипроцесен MS пропагатор

С израза (4.35) за единичния пропагатор \mathbf{U} , можем лесно да намерим N -процесния пропагатор, като вземем N -та степен на \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U}^N = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S}^\dagger \cdots \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}}^N \mathbf{S}^\dagger, \quad (4.36)$$

където $\tilde{\mathbf{U}}^N$ е трансформиранят MS пропагатор. Тъй като системата MS се разлага на M независими системи с две състояния, тогава всички те имат M независими еволюции, управлявани от съответните пропагатори $\tilde{\mathbf{U}}_m$ на уравнение (4.29). Наистина, имаме от у-ние (4.32)

$$\tilde{\mathbf{U}}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{d \times d} & \mathbf{O}_{d \times 2M} \\ \mathbf{O}_{2M \times d} & \tilde{\mathbf{U}}_c^N \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Имайки $\tilde{\mathbf{U}}_c^N = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{U}}_b^N \mathbf{R}^{-1}$, и $\tilde{\mathbf{U}}_b^N$ лесно се намира,

$$\tilde{\mathbf{U}}_b^N = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{U}}_2^N & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{U}}_M^N \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Можем да намерим всички $\tilde{\mathbf{U}}_m^N$ с помощта на уравнения (4.5) и (4.6) и след това да конструираме пропагатора на пълната система.

За да намерим $\tilde{\mathbf{U}}_m^N$, първо отбелязваме, че той не притежава $SU(2)$ симетрия, тъй като неговата детерминанта е $e^{-i\delta}$ и следователно не можем да използваме уравнения (4.5) и (4.6) директно, защото те изискват $SU(2)$ симетрия. Следователно, представяме $\tilde{\mathbf{U}}_m$ като

$$\tilde{\mathbf{U}}_m = e^{-i\delta/2} \begin{bmatrix} a_m e^{i\delta/2} & b_m e^{i\delta/2} \\ -b_m^* e^{-i\delta/2} & a_m^* e^{-i\delta/2} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

където матрицата от дясната страна сега е $SU(2)$ симетрична, което ни позволява да приложим

отношенията (4.5) и (4.6). Имаме

$$\tilde{\mathbf{U}}_m^N = e^{-iN\delta/2} \begin{bmatrix} a_m e^{i\delta/2} & b_m e^{i\delta/2} \\ -b_m^* e^{-i\delta/2} & a_m^* e^{-i\delta/2} \end{bmatrix}^N. \quad (4.40)$$

След това, чрез въвеждане на означенията

$$a'_m = a_m e^{i\delta/2}, \quad b'_m = b_m e^{i\delta/2}, \quad (4.41)$$

и използвайки уравнения (4.5) и (4.6), намираме

$$\tilde{\mathbf{U}}_m^N = \begin{bmatrix} a'_{mN} & b'_{mN} \\ -b'^*_{mN} e^{-iN\delta} & a'^*_{mN} e^{-iN\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

където

$$a'_{mN} = \left[\cos(N\theta'_m) + i \operatorname{Im}(a'_m) \frac{\sin(N\theta'_m)}{\sin(\theta'_m)} \right] e^{-iN\delta/2}, \quad (4.43a)$$

$$b'_{mN} = b'_m \frac{\sin(N\theta'_m)}{\sin(\theta'_m)} e^{-iN\delta/2}, \quad (4.43b)$$

$$\theta'_m = \arccos(\operatorname{Re} a'_m). \quad (4.43b)$$

Отношенията (4.43), заедно с (4.41) дават връзката между единичните $\tilde{\mathbf{U}}_m$ и повтарящите се $\tilde{\mathbf{U}}_m^N$ пропагатори. По този начин намираме мултипроцесния пропагатор на M MS системи с две състояния [вж. у-ние (4.37)],

$$\tilde{\mathbf{U}}_c^N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_N & \mathbf{B}_N \\ -\mathbf{B}_N^* e^{-iN\delta} & \mathbf{A}_N^* e^{-iN\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

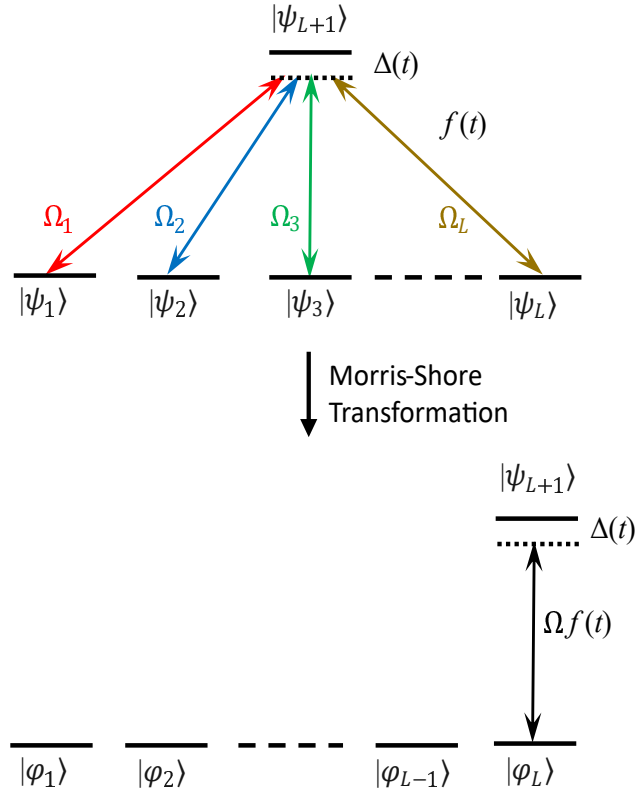
с

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} a'_{1N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{2N} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{MN} \end{bmatrix}, \quad (4.45a)$$

$$\mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b'_{1N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{2N} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b'_{MN} \end{bmatrix}. \quad (4.45b)$$

След това намираме $\tilde{\mathbf{U}}^N$ от у-ние (4.37) и (4.44). И накрая, намираме оригиналния N -процесен пропагатор \mathbf{U}^N чрез трансформацията (4.36), т.е. $\mathbf{U}^N = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{U}}^N\mathbf{S}^\dagger$.

Тъй като \mathbf{S} е константна матрица и се появява както в \mathbf{U} на у-ние (4.35), така и в \mathbf{U}^N на у-ние (4.36) по един и същи начин, следва, че \mathbf{U}^N може да се получи от \mathbf{U} чрез заместванията $a_m \rightarrow a'_{mN}$ и $b_m \rightarrow b'_{mN}$ и $e^{i\delta} \rightarrow e^{iN\delta}$, според връзките (4.43).



Фигура 4.3: Трансформацията на Морис-Шор за многоподна система, която се състои от L изродени основни състояния и едно възбудено състояние. Системата се трансформира в единична система с две състояния и набор от $L - 1$ отделени (тъмни) основни състояния. Всички куплунги имат една и съща времева зависимост $f(t)$ и еднакви детюнинги $\Delta(t)$.

4.4.3 Специален случай: Мултиподна система

Единичен мултипод пропагатор

Като най-общ пример, тук разглеждаме мултиподната система, показана схематично на фиг. 4.3. Състои се от L основни състояния и едно възбудено състояние, $M = 1$. Всички основни състояния са свързани с възбуденото състояние, но не и помежду си. Всички куплунги имат една и съща времева зависимост $f(t)$ и еднакъв детюнинг $\Delta(t)$, но техните максимални стойности могат да бъдат различни. Следователно Хамилтониан отговаря на MS симетрията.

Постоянната матрица Ω на у-ние (4.19) има размерността $L \times 1$ и Хамилтонианът е

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega_1 f(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega_2 f(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega_L f(t) \\ \Omega_1^* f(t) & \Omega_2^* f(t) & \cdots & \Omega_L^* f(t) & 2\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

където Ω_l ($l = 1, 2, \dots, L$) са произволни комплексни константи. MS трансформацията от оригинала към MS базиса за хамилтониана и пропагатора е една и съща

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{H} \mathbf{S}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{S}, \quad (4.47)$$

където константната матрица на трансформация \mathbf{S} има следния вид

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_2^*}{X_2} & \frac{\Omega_1\Omega_3^*}{X_2X_3} & \frac{\Omega_1\Omega_4^*}{X_3X_4} & \cdots & \frac{\Omega_1\Omega_L^*}{X_{L-1}X_L} & \frac{\Omega_1}{X_L} & 0 \\ -\frac{\Omega_1^*}{X_2} & \frac{\Omega_2\Omega_3^*}{X_2X_3} & \frac{\Omega_2\Omega_4^*}{X_3X_4} & \cdots & \frac{\Omega_2\Omega_L^*}{X_{L-1}X_L} & \frac{\Omega_2}{X_L} & 0 \\ 0 & -\frac{X_2}{X_3} & \frac{\Omega_3\Omega_4^*}{X_3X_4} & \cdots & \frac{\Omega_3\Omega_L^*}{X_{L-1}X_L} & \frac{\Omega_3}{X_L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X_3}{X_4} & \cdots & \frac{\Omega_4\Omega_L^*}{X_{L-1}X_L} & \frac{\Omega_4}{X_L} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{X_{L-1}}{X_L} & \frac{\Omega_L}{X_L} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

с реални константи

$$X_l = \sqrt{\sum_{k=1}^l |\Omega_k|^2}, \quad (l = 2, 3, \dots, L). \quad (4.49)$$

MS трансформацията на u -ние (4.47), заедно с u -ние (4.46) и (4.48), дава трансформирания MS Хамилтониан $\tilde{\mathbf{H}}(t)$, който се редуцира към ефективна система с две състояния,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega f(t) \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega f(t) & 2\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

с

$$\Omega = \sqrt{\sum_{l=1}^L |\Omega_l|^2}. \quad (4.51)$$

Хамилтониана в MS базиса (4.50) генерира пропагатора

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b^*e^{-i\delta} & a^*e^{-i\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

който има само двойка Cayley-Klein параметри a, b , тъй като всички други състояния в MS базиса са разкуплирани. Оригиналният пропагатор се намира чрез инверсията на u -ние (4.47), т.е. $\mathbf{U} =$

$\mathbf{S}\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{S}^\dagger$, или експлицитно,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} & & & & & b\frac{\Omega_1}{\Omega} \\ & & & & & b\frac{\Omega_2}{\Omega} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & b\frac{\Omega_L}{\Omega} \\ & & & & & a^*e^{-i\delta} \\ -b^*\frac{\Omega_1^*}{\Omega}e^{-i\delta} & -b^*\frac{\Omega_2^*}{\Omega}e^{-i\delta} & \dots & -b^*\frac{\Omega_L^*}{\Omega}e^{-i\delta} & & \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

където $|\Omega\rangle = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L\}^T$ and hence $\langle\Omega| = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L\}^*$.

Мультипроцесен мултипод пропагатор

Съгласно у-ние (4.29), N -процесния пропагатор в базата MS е

$$\tilde{\mathbf{U}}^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_N & b'_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b'_N e^{-iN\delta} & a'^*_N e^{-iN\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

където мультипроцесните Cayley-Klein параметри a'_N и b'_N се определят с връзките (4.43) от еднопроцесните параметри a , b и δ . Мультипроцесният пропагатор $\tilde{\mathbf{U}}^N$ има същата форма като единичния $\tilde{\mathbf{U}}$ (4.52). Затова използваме отново израза за оригиналния пропагатор (4.53), като правим заместванията $a \rightarrow a'_N$, $b \rightarrow b'_N$ и $e^{-i\delta} \rightarrow e^{-iN\delta}$. По този начин намираме

$$\mathbf{U}^N = \begin{bmatrix} & & & & & b'_N\frac{\Omega_1}{\Omega} \\ & & & & & b'_N\frac{\Omega_2}{\Omega} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & b'_N\frac{\Omega_L}{\Omega} \\ & & & & & a'^*_N e^{-iN\delta} \\ -b'^*_N\frac{\Omega_1^*}{\Omega}e^{-iN\delta} & \dots & -b'^*_N\frac{\Omega_L^*}{\Omega}e^{-iN\delta} & & & \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

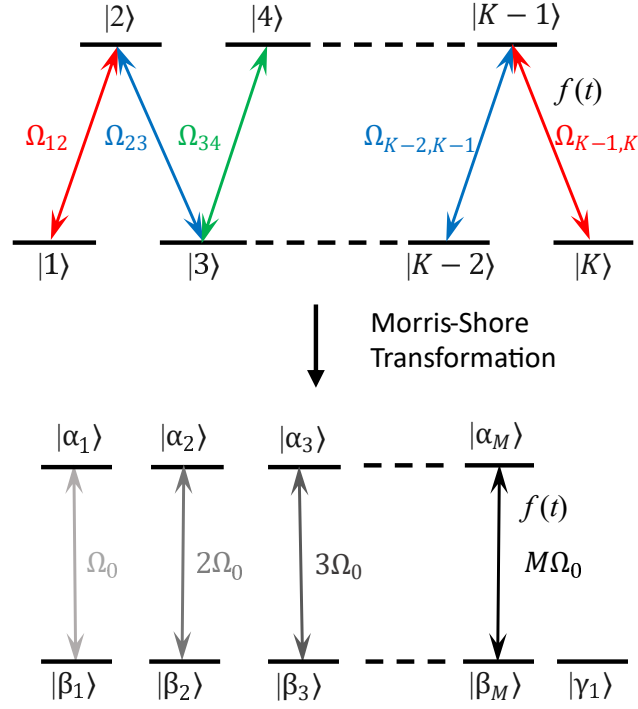
Като примери за общата многоподна система, в дисертацията сме разгледали още мультипроцесните пропагатори за два важни случая: Λ и триподните системи, на които тук няма да се спираме, но могат да се получат при $L = 2$ и $L = 3$ съответно.

4.5 Система, притежаваща WM и MS симетрии

И накрая, разглеждаме система, която има едновременно WM и MS симетрии. Симетриите WM и MS са съвместими само при резонанс ($\Delta = 0$), което ще приемем. За ненулев детюнинг в системата WM не могат да се разделят две изродени групи от състояния, както се изисква от MS симетрията.

За да изясним връзката между двете симетрии, ще покажем как изглежда една WM система в MS базиса. Системата е показана на фиг. 4.4. Както по-горе, всички Раби честоти имат една и съща времева зависимост $f(t)$. Въпреки това, противно на общия MS случай, когато амплитудите на куплунгите могат да бъдат произволни, тук те трябва да се подчиняват на WM условието (4.96),

$$\Omega_{k,k+1} = \sqrt{k(K-k)}\Omega_0, \quad (k = 1, 2, \dots, K-1), \quad (4.56)$$



Фигура 4.4: Система с WM и MS симетрии. Горѐ: WM системата е представена като два набора от верижно свързани състояния с нулеви детюнинги. Стойностите на куплунгите $\Omega_{k,k+1}$ са дадени от Eq. (4.56). Долу: MS трансформацията редуцира системата до M независими MS системи с две състояния. За $K = 2M + 1$ ($M = 1, 2, \dots$), в MS базиса има M системи с две състояния със куплунги, дадени от у-ние (4.59в) и едно тъмно състояние. За $K = 2M$ (не е показано), няма тъмно състояние и връзките са дадени от у-ние (4.59б).

където Ω_0 е произволна константа, считана за известна. Тогава Cayley-Klein параметрите в WM представянето са

$$a_N = \cos(N\theta), \quad (4.57a)$$

$$b_N = -i \sin(N\theta), \quad (4.57б)$$

$$\theta = \frac{|\Omega_0|}{2} \int_0^T f(t) dt. \quad (4.57в)$$

За да намерим Cayley-Klein параметрите в MS представянето, трябва да конструираме матрицата Ω според у-ния (4.19) и (4.56),

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Omega_{23} & \Omega_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_{45} & \Omega_{56} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{K-3,K-2} & \Omega_{K-2,K-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Omega_{K-1,K} \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Собствените стойности λ_m^2 на M -мерната квадратна матрица $\Omega^\dagger \Omega$ са $\lambda_m^2 = m_j^2 |\Omega_{j0}|^2$, т.е. константите на свързване λ_m на M независимите системи са

$$\lambda_m = m_j |\Omega_0|, \quad (4.59a)$$

$$m_j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{K-1}{2}, \quad (K = 2, 4, 6, \dots) \quad (4.59б)$$

$$m_j = 1, 2, \dots, \frac{K-1}{2}, \quad (K = 3, 5, 7, \dots). \quad (4.59в)$$

Тогава MS Cayley-Klein параметрите са

$$a_{mN} = \cos(N\theta_m), \quad (4.60a)$$

$$b_{mN} = -i \sin(N\theta_m), \quad (4.60б)$$

$$\theta_m = \frac{m_j |\Omega_0|}{2} \int_0^T f(t) dt, \quad (4.60в)$$

които дават връзката между ъглите θ и θ_m на MS и WM представяния

$$\theta_m = m_j \theta. \quad (4.61)$$

Глава 5

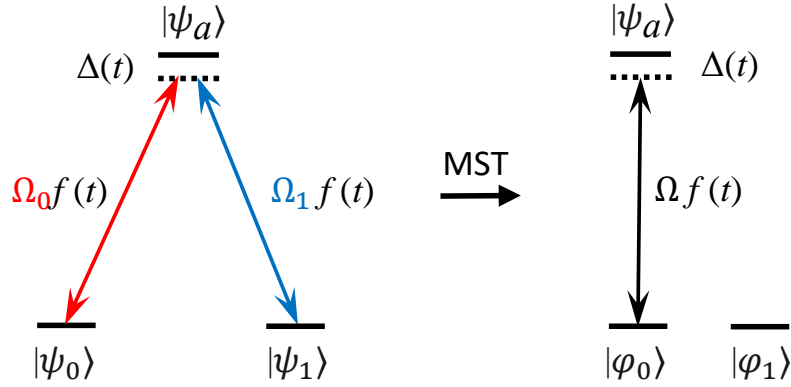
Характеризиране на високо-прецизни Раманови кубитни гейтове

Рамановите кубити, представени от два основни или метастабилни квантови състояния, свързани чрез преходно състояние, притежават някои предимства пред директно свързаните кубити, особено по отношение на значително по-дълъг период на радиативно излъчване, по-кратко време за гейта и по-ниска интензивност на радиацията поради използването на разрешени електрически диполни оптични преходи. Те също така са относително лесни за използване и контрол, което ги прави привлекателна опция за изграждане на квантови гейтове за квантови компютри. В тази работа представяме прост и бърз томографски метод за измерване на грешките на Рамановите кубитни гейтове, притежаващи динамична симетрия на Морис-Шор. Последното се случва, когато състоянията на кубита са в дву-фотонен резонанс, а контролните полета имат еднаква зависимост от времето. Методът се основава на многократно (мултипроцесно) повтаряне на един и същ гейт, което увеличава малките кохерентни грешки до достатъчно големи стойности, които могат да бъдат измерени с висока точност и прецизност. След това малките грешки на единичния гейт могат да бъдат определени от увеличените грешки, като се използват аналитичните връзки между тях.

5.1 Въведение

Рамановите кубити са образувани от базисни състояния с дълъг живот $|0\rangle$ и $|1\rangle$ на три-състояниева квантова система във верижно свързана Раман конфигурация $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ — са популярна реализация на кубити за квантови технологии [Jam+98; Eco+06; Hug+97]. Те са особено подходящи за ултрастудени йони и атоми, където Рамановите свързващи модели са широко разпространени [Lei+03; Win+98; Bar+03; Gae+16; VS97]. Такива Раманово-свързани кубити често се наричат хиперфини кубити, когато състоянията на кубита са хиперфини разцепвания (поднива) на основното ниво. [Bli+04]. В сравнение с директно свързаните кубити, те имат предимството да използват разрешените електрически диполни преходи $|0\rangle \leftrightarrow |a\rangle$ и $|1\rangle \leftrightarrow |a\rangle$, вместо забранения електрически диполен преход $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Това позволява използването на удобни оптически преходи с много по-малка мощност на лазера, което води до по-бързи гейтове с пренебрежими енергийни измествания и нежелани свързвания [Sho90; Sho11; VKS03]. Освен това, наличието на две полета внася повече контролни параметри и възможността за използване на по-сложни методи за квантов контрол, като композитни импулси [TV20], оптимален контрол и методи за пряк път [Cor22; Lee22; Ega21; Sch09; McC18]. Въпреки това, Рамановите кубити изискват по-голям контрол, тъй като сега участват три, вместо две, състояния, с необходимостта да се избегне изтичането на заселености към спомагателното преходно състояние $|a\rangle$. Освен това, характеризането на гейта също изисква работа с три състояния и следователно $SU(3)$ динамика вместо $SU(2)$.

В определени случаи динамика за три състояния може да бъде намалена до такава с две състояния. Това е така, когато преходното състояние $|\psi_a\rangle$ е далеч извън резонанс с управляващите полета; тогава то може да бъде елиминирано адиабатно [KVS07; Vit+17; Vit+01], което генерира *приблизителна* $SU(2)$ динамика, включваща само кубитните състояния, с ефективно свързване между кубитните състояния и АС Щаркови (енергийни) измествания. Друг случай на $SU(3) \rightarrow$



Фигура 5.1: Редуциране на Раманова Λ система с три нива (ляво) до ефективна система с две нива (дясно) чрез трансформацията на Морис-Шор (MST). Оригиналната система се състои от две основни състояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$ и помощно възбудено състояние $|\psi_a\rangle$. Раби честотите на оригиналната система имат еднаква зависимост от времето $f(t)$ и еднакви детюнинги (честотни разлики) $\Delta(t)$. Намалената система се състои от горно състояние $|\psi_a\rangle$ (същото като оригиналното спомагателно състояние), светло състояние $|\varphi_0\rangle$ и тъмно състояние $|\varphi_1\rangle$

SU(2) редуциране, този път точно, се случва, когато Рамановата система притежава симетрията на Вигнер-Майорана за ъглов момент [Wig31; Maj32; SV23].

Трети случай, настъпва, когато Раман-свързаната система притежава симетрията на Морис-Шор [MS83; Sho14; SV23; RVS06; KV06; Kim+15]; тогава трисъстояниевата система може точно да бъде разложена на двусъстояниевата система и развързано (тъмно) състояние. Тази симетрия изисква двуфотонен резонанс между крайните състояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, докато средното състояние $|\psi_a\rangle$ може да бъде извън единични фотонни резонанси. Освен това, двете Раман свързвания трябва да имат еднаква зависимост от времето, но техните амплитуди и фази могат да бъдат различни; действително, гъвкавостта при избора на амплитудите и фазите на свързванията е позволила създаването на точни квантови схеми за управление. Трансформацията на Морис-Шор може да бъде обобщена, като се премахнат условията за двуфотонен резонанс и времеви условия, въпреки че тогава редуцирането $SU(3) \rightarrow SU(2)$ е само приблизително [ZVV20; ZRV22].

Целта на настоящата работа е да разработи томографски метод за определяне на кохерентни грешки на гейтовете в Раманово-свързаните кубити, подчиняващи се на симетрията на Морис-Шор (MS). Методът се основава на този, представен в референциите [Vit20; Vit18; VK95] за системи с две нива, при който определен гейт с висока прецизност се повтаря многократно, следван от измервания на популацията в края на последователността. Методът използва конструктивната интерференция, създадена чрез повторенията, които водят до увеличаване на грешките до достатъчно големи стойности. Тези стойности могат да бъдат измерени надеждно, от което може да се определят грешките на единичен гейт поради наличието на аналитични връзки между вероятностите при еднопроцесен и мултипроцесен преход.

Това наше изследване е организирано по следния начин. Първо, в раздел 5.2 разглеждаме подробно случая, когато Рамановият кубит се управлява от два импулса с правоъгълна времева форма, с цел да се възползваме от простотата на решението. След като извлечем основния томографски принцип, базиран на усилване на грешките (NR апроксимация, вж. по-долу раздели 5.3 и 5.4), в раздел 5.5 преминаваме към гладки форми на импулса и показваме, че прости решения, базирани на правоъгълни форми, са приложими и за гладки форми.

5.2 Еднопроцесен и мултипроцесен преход

5.2.1 Еднопроцесен преход

Разглеждаме Раманова Λ система при условията на трансформацията на Морис-Шор (MS) [MS83], показани на Фиг. 5.1, където оригиналната система е вляво, а трансформираната система по MS е вдясно. Хамилтонианът на системата има следния вид:

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_0 f(t) \\ 0 & 0 & \Omega_1 f(t) \\ \Omega_0^* f(t) & \Omega_1^* f(t) & 2\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

където $\Omega_1 f(t)$ and $\Omega_2 f(t)$ са Раби честотите, които имат еднакви времезависимости $f(t)$ и Ω_1 , и Ω_2 са комплексни константи. $\Delta(t)$ е детюнига, който е еднакъв за двете полета. MS трансформацията редуцира оригиналния Хамилтониан (5.1) до ефективен Хамилтониан на система с две нива [KV06; KVS07],

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{S}\mathbf{H}(t)\mathbf{S}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega f(t) \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega f(t) & \Delta(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

където \mathbf{S} е трансформационната комплексна и време-независеща матрица

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_1^*}{\Omega} & \frac{\Omega_0}{\Omega} & 0 \\ -\frac{\Omega_0^*}{\Omega} & \frac{\Omega_1}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

и Ω е средно-квадратичната (RMS) Раби честота, която е реална константа,

$$\Omega = \sqrt{|\Omega_0|^2 + |\Omega_1|^2}. \quad (5.4)$$

Тук MS Хамилтонианът $\tilde{\mathbf{H}}(t)$ е реален, а комплексността на оригиналния Хамилтониан $\mathbf{H}(t)$ се отчита от трансформационната матрица \mathbf{S} . В MS базиса горното състояние $|\psi_a\rangle$ е същото като в оригиналната система, докато двата по-долни MS състояния са суперпозиции на оригиналните по-долни състояния,

$$|\varphi_0\rangle = \frac{\Omega_1^* |\psi_0\rangle - \Omega_0^* |\psi_1\rangle}{\Omega}, \quad (5.5a)$$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{\Omega_0 |\psi_0\rangle + \Omega_1 |\psi_1\rangle}{\Omega}. \quad (5.5b)$$

Едното от тях — светлото състояние $|\varphi_1\rangle$ — е свързано с горното състояние $|\psi_a\rangle$ с RMS връзка $\Omega f(t)$. Другото — тъмното състояние $|\varphi_0\rangle$ — е несвързано и следователно оригиналната система с три състояния се свежда до такава с две състояния, $|\varphi_1\rangle \leftrightarrow |\psi_a\rangle$. Това редуциране преобразува оригиналната динамика $U(3)$ в ефективна динамика $U(2)$, което значително улеснява анализа.

Без това да води до ограничаване, разглеждаме началното време да е $t_i = 0$, а крайното време да бъде означено с T . Пропагаторът в MS базиса може да се запише като

$$\tilde{\mathbf{U}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b^*e^{-i\delta} & a^*e^{-i\delta} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

където a и b са комплексни Кейли-Клайн параметри (СК) parameters, ограничени от завизимостта

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (5.7)$$

и δ е фаза дефинирана като

$$\delta = \int_0^T \Delta(t) dt. \quad (5.8)$$

С използване на обратната матрица на трансформацията (5.6), оригиналния пропагатор придобива вида

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{S}^\dagger \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (a-1)\frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} & (a-1)\frac{\Omega_0\Omega_1^*}{\Omega^2} & b\frac{\Omega_0}{\Omega} \\ (a-1)\frac{\Omega_0^*\Omega_1}{\Omega^2} & 1 + (a-1)\frac{|\Omega_1|^2}{\Omega^2} & b\frac{\Omega_1}{\Omega} \\ -b^*\frac{\Omega_0^*}{\Omega}e^{-i\delta} & -b^*\frac{\Omega_1^*}{\Omega}e^{-i\delta} & a^*e^{-i\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ако еволюцията на системата започне при състояние $|\psi_0\rangle$, уравнение (5.9) диктува следните заселености в края на процеса,

$$P_0 = \left| 1 + (a-1)\frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} \right|^2 \quad (5.10a)$$

$$P_1 = \left| (a-1)\frac{\Omega_0\Omega_1}{\Omega^2} \right|^2 \quad (5.10б)$$

$$P_a = \left| b\frac{\Omega_0}{\Omega} \right|^2. \quad (5.10в)$$

По-нататък ще говорим за пропагатора (5.9) и заселеностите (5.10) като *едно-преходен пропагатор* и *едно-преходни заселености*.

Нека приемем, че системата във Фиг. 5.1 е кубит с кубитни състояния $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ и $|\psi_1\rangle = |1\rangle$. Тогава трябва да имаме цялата популация в кубитното подпространство, което означава, че СК параметърът b трябва да е нула, $b = 0$. Следователно, поради условието за запазване на вероятността (5.7), другият СК параметър a ще бъде фазов фактор, т.е. $a = e^{i\varphi}$. Фактически, неговата фаза φ е важен контролен параметър. Другият контролен параметър е съотношението Ω_0/Ω_1 , което определя какъв квантов гейт се създава.

Условието $b = 0$, разгледано в MS базиса, означава, че няма преход между MS състоянието $|\varphi_0\rangle$ и горното състояние $|\psi_a\rangle$. Очевидно, не сме заинтересовани от тривиалния случай на липса на взаимодействие, защото тогава $a = 1$, а пропагаторът е единичната матрица. Условието $b = 0$ при наличие на взаимодействие може да бъде постигнато по два сценария. Най-простият е с резонансен импулс с времева площ 2π . Тогава $a = -1$, $b = 0$ и пропагаторът (5.9) се свежда до

$$\mathbf{U}(T) = \begin{bmatrix} 1 - 2\frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} & -2\frac{\Omega_0\Omega_1^*}{\Omega^2} & 0 \\ -2\frac{\Omega_0^*\Omega_1}{\Omega^2} & 1 - 2\frac{|\Omega_1|^2}{\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-i\delta} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Втората възможност е когато сме далеч от резонанса, при което $|\Delta| \gg \Omega$ и проблема с трите състояния може да бъде намален до две. В този случай фазата φ може да бъде изразена приблизително като

$$\varphi \approx \frac{\Omega^2}{\Delta} \int_0^T f^2(t) dt . \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) показва, че случаят на далеч от резонанс е подходящ за създаване на фазови гейтове.

В тази работа разглеждаме само случая на резонанс. Причината за това е, че в случая на далеч от резонанс, поради значителното увеличение на детюнига и Раби честотите, гейтовете изискват значително по-голяма площ на импулса и, следователно, са много по-бавни. Освен това, вероятностите за преходи към по-високите енергийни нива извън Раманова система с три нива, стават значителни. Това би застрашило качеството на гейта поради вредни грешки от течове на заселености.

5.2.2 Целеви гейтови параметри и заселености

В резонансния случай имаме $\varphi = \pi$, отгук $a = -1$. Целевия гейт има следния общ вид

$$U_{tar} = \begin{bmatrix} \cos \zeta & e^{-i\phi} \sin \zeta & 0 \\ e^{i\phi} \sin \zeta & -\cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

където фазовия фатор $e^{i\phi}$ идва от комплексността на Ω_0 и Ω_1 , докато ζ е смесващ ъгъл дефиниран като

$$|\Omega_0|/\Omega = \sin(\zeta/2), \quad |\Omega_1|/\Omega = \cos(\zeta/2). \quad (5.14)$$

За да конструираме X гейт, трябва да имаме $\zeta = \pi/2$ i.e., $|\Omega_0|/\Omega = |\Omega_1|/\Omega = 1/\sqrt{2}$. За Адамар гейт имаме нужда от $\zeta = \pi/4$, тоест, $|\Omega_0|/\Omega = \sin(\pi/8)$ and $|\Omega_1|/\Omega = \cos(\pi/8)$.

За да определим количествено грешките в гейтовете, произтичащи от неточни резонанс (ненулево Δ) и неточна площ на импулса, е удобно да изразим комплексните Кейли-Клайн параметри a и b , ограничени от Уравнение (5.7), чрез три реални параметра, като

$$a = -e^{-i\alpha} \cos \gamma \quad (5.15a)$$

$$b = -ie^{-i\beta} \sin \gamma, \quad (5.15b)$$

където α , β и γ имат всички целеви стойности 0, за да се възстановят стойностите на a и b в идеалния случай. Затова те са мерки за *кохерентни грешки в гейта*. От изискването за резонанс $\Delta \rightarrow 0$ и Уравнение (5.8), следва, че целевата стойност на фазата δ също е нула, $\delta \rightarrow 0$, т.е. тя също е мярка за грешка.

За високофиделитетните квантови врати тези грешки са много малки и тяхното определение е предизвикателство. Концепцията на тази задача е да усили тези грешки чрез повторение на гейтовете до достатъчно големи стойности, които могат да бъдат измерени надеждно, с висока точност и прецизност.

Параметърът ζ се счита за известен. Всъщност, той може да бъде определен от едно-преходното измерване на вероятностите. Например, следва от Уравнение (5.13), че $P_1 \approx \sin^2(\zeta)$, следователно параметърът ζ може да бъде намерен отгук. След това, с подмяна на ζ в Eq. (5.14) двете $|\Omega_0|/\Omega$ и $|\Omega_1|/\Omega$ могат да бъдат също намерени.

5.2.3 Мултипроцесен преход

В нашата предишна работа [SV23], ние намерихме N -процесния пропагатор на три стъпалната Раманова система. В представянето на Шрьодингер, N -процесния пропагатор е N -та степен от еднопроцесния пропагатор U (5.9); и се изразява като

$$\mathbf{U}^N = \begin{bmatrix} 1 + (a_N - 1) \frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} & (a_N - 1) \frac{\Omega_0 \Omega_1^*}{\Omega^2} & b_N \frac{\Omega_0}{\Omega} \\ (a_N - 1) \frac{\Omega_0^* \Omega_1}{\Omega^2} & 1 + (a_N - 1) \frac{|\Omega_1|^2}{\Omega^2} & b_N \frac{\Omega_1}{\Omega} \\ -b_N^* \frac{\Omega_0^*}{\Omega} e^{-iN\delta} & -b_N^* \frac{\Omega_1^*}{\Omega} e^{-iN\delta} & a_N^* e^{-iN\delta} \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

където N -процесните Кейли-Клайн параметри a_N и b_N са свързани с еднопроцесните a и b посредством релациите

$$a_N = \left[\cos(N\vartheta) + i\Im(a_\delta) \frac{\sin(N\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \right] e^{-iN\delta/2}, \quad (5.17a)$$

$$b_N = b_\delta \frac{\sin(N\vartheta)}{\sin(\vartheta)} e^{-iN\delta/2}, \quad (5.17b)$$

където

$$a_\delta = a e^{i\delta/2}, \quad (5.18a)$$

$$b_\delta = b e^{i\delta/2}, \quad (5.18b)$$

$$\vartheta = \arccos(\Re a_\delta). \quad (5.18c)$$

Многопроцесните вероятности са

$$P_0^{(N)} = \left| 1 + (a_N - 1) \frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} \right|^2, \quad (5.19a)$$

$$P_1^{(N)} = \left| (a_N - 1) \frac{\Omega_0 \Omega_1^*}{\Omega^2} \right|^2, \quad (5.19b)$$

$$P_a^{(N)} = \left| b_N \frac{\Omega_0}{\Omega} \right|^2. \quad (5.19c)$$

В Уравнения (5.17), параметрите ϑ и δ се умножават с N в някои членове, следователно сме в състояние да ги усилим след повторенията. Отбелязваме, че параметрите $|\Omega_0|/\Omega$ и $|\Omega_1|/\Omega$ в уравнения (5.19) остават същите като при еднопроцесния пропагатор (5.9).

За високо-фиделни гейтове трябва да имаме

- $P_a^{(N)}$ да бъде много малка след всеки гейт (пас), тоест

$$P_a^{(N)} \ll 1 \quad (N = 1, 2, \dots), \quad (5.20)$$

- $P_1^{(N)}$ да бъде много малка след всеки четен пас, тоест

$$P_1^{(2M)} \ll 1 \quad (M = 1, 2, \dots), \quad (5.21)$$

Затова ние използваме тези вероятности като показатели, чрез които да определим грешките α , β и γ за X и N гейтове.

5.3 Близко-резонансно (NR) приближение

В този раздел нашата цел е да установим връзката между грешките в Хамилтониана и тези в пропагатора. За постигане на това, използваме модела на Раби и прилагаме близък-резонансен (NR) подход, произтичащ от него. Установяваме, че този подход не е само подходящ за модела на Раби, но също така е приложим и към други модели, които липсват аналитични решения.

5.3.1 Предположения и допускания

Тъй като нашата цел е да разработим протокол за определяне на грешките на Рамановите гейтове с високо фиделити, предполагаме, че техните грешки са малки. Следователно правим три общи предположения.

- Допускаме, че детюнигата Δ е малък и постоянен,

$$|\delta| \ll \pi \quad (\text{където } \delta = \Delta T), \quad (5.22a)$$

което наричаме *детюниг грешка*.

- За формата на импулса $f(t)$, е изпълнено $f(0) = f(NT) = 0$ и $f_{max} = 1$, на базата на което дефинираме *запълващ коефициент*

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (5.22b)$$

ролята на който ще се изясни по-долу.

- Тъй-като при резонанс Кейли-Клайн параметъра a е $a = \cos(A/2)$, където $A = \int_0^T \Omega f(t) dt$ е RMS импулсната площ, и поради това, че целевата стойност на a е -1 , импулсната площ A трябва да бъде много близко до 2π ; оттук следва че имаме

$$A = \Omega \int_0^T f(t) dt = \Omega r T = 2(\pi - \epsilon), \quad (5.22b)$$

където $|\epsilon| \ll \pi$ е *грешка на импулсната площ*.

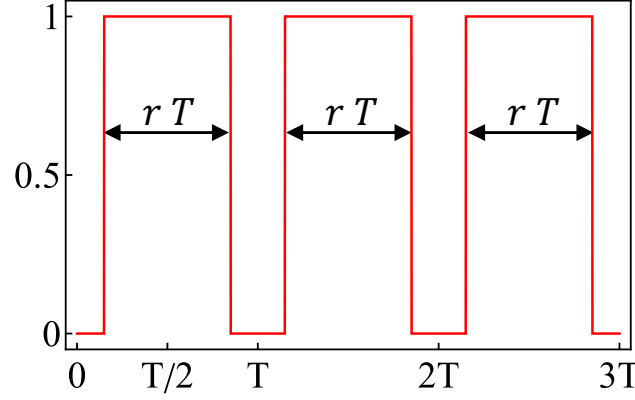
Ще правим тези предположения през целия текст отсега нататък.

5.3.2 Раби модел и NR приближение

Моделът на Раби е удобен по две отношения: първо, това е модел с точно решение и второ, той позволява всяко запълване $0 \leq r \leq 1$. Периодичната зависимост от времето в модела на Раби е показана на фиг. 5.2 и има следния вид

$$f_R(t) = \sum_{n=0}^{N-1} R \left[\frac{t}{rT} - \frac{(2n+1)}{2r} \right], \quad (5.23)$$

където R означава правоъгълната функция. В този случай и двете СК параметъра се дават от точните изрази



Фигура 5.2: Първите три импулса с периодична зависимост от времето $f_R(t)$, свързана с модела на Раби и дадена в Уравнение (5.23).

$$a = \left[\cos(\sigma/2) + i \frac{\delta}{\sigma} \sin(\sigma/2) \right] e^{-i\delta r/2}, \quad (5.24a)$$

$$b = -i \frac{A}{\sigma} \sin(\sigma/2) e^{-i\delta/2}, \quad (5.24b)$$

където $\sigma = \sqrt{\delta^2 + A^2/r^2}$. Съобразно условията (5.22), намираме следните изрази, които ще се наричат *близко-резонансно приближение* (NR приближение),

$$a \approx -\cos(\epsilon) e^{-i\delta r/2}, \quad (5.25a)$$

$$b \approx -i \sin(\epsilon) e^{-i\delta/2}, \quad (5.25b)$$

$$a_\delta \approx -\cos(\epsilon) e^{i\delta(1-r)/2}, \quad (5.25c)$$

$$b_\delta \approx -i \sin(\epsilon), \quad (5.25d)$$

$$\vartheta \approx \pi - \sqrt{\epsilon^2 + \delta^2(1-r)^2/4}. \quad (5.25e)$$

Оттук и уравнение (5.15) намираме

$$\alpha \approx \delta r/2, \quad \beta \approx \delta/2, \quad \gamma \approx \epsilon. \quad (5.26)$$

Отбележете, че параметрите α, β и γ са параметри на пропагатора (гейта), докато δ, r и ϵ са параметри на Хамилтониана, следователно имаме директни връзки между тях.

5.3.3 Фиделити

За всеки унитарен гейт U фиделитито е

$$F = \frac{|\text{Tr}(U_0 U^\dagger)|^2}{d^2} \quad (5.27)$$

където U_0 е целевия гейт, d е размерността на Хилбертовото пространство, в нашия случай $d = 3$.

- За $r = 1$, тоест $\alpha = \beta$, намираме от у-ние (5.27) за fidelитито

$$F = \frac{1}{9} \left[\cos^2 \zeta' + 2 \cos \alpha \cos \zeta' \cos \gamma (1 + \cos \zeta') + (1 + \cos \zeta')^2 \cos^2 \gamma \right], \quad (5.28)$$

където ζ' е грешката на ζ , тоест за X гейт имаме $\zeta' = \frac{\pi}{2} - \zeta$, а за Адамар $\zeta' = \frac{\pi}{4} - \zeta$. При малки грешки, $|\zeta'| \ll 1$, отгук намираме

$$F = \frac{1 + 4 \cos \alpha \cos \gamma + 4 \cos^2 \gamma}{9} - \frac{1 + 3 \cos \alpha \cos \gamma + 2 \cos^2 \gamma}{9} \zeta'^2. \quad (5.29)$$

При $\zeta' = 0$, се запазва само първия член. Очевидно, при отсъствие на всякакви грешки, $\alpha = \gamma = \zeta' = 0$, тогава $F = 1$.

- За $r < 1$, израза получен от у-ние (5.27) за fidelитито е твърде обемист и не го представяме тук. За $\zeta' = 0$, fidelитито може да бъде изразена използвайки параметрите ϵ , δ , и r , които характеризират Хамилтониана. Така имаме:

$$F = \frac{1}{9} \left[1 + 2 \cos \epsilon \left(\cos(r\delta/2) + \cos(\delta - r\delta/2) + (1 + \cos(\delta - r\delta)) \cos \epsilon \right) \right]. \quad (5.30)$$

5.4 Определяне на гейтовите грешки

Сега ще определим грешките α , β и γ , указани в Уравнения (5.26), чрез мултипроцесните вероятности в близкорезонансното приближение. Всички фигури използват точното решение на модела на Раби. Въпреки това, за обхвата на грешка от 0.05, който ни интересува, графиките са практически идентични с тези за близкорезонансното приближение. В Раздел 5.5 прилагаме близкорезонансното приближение (5.25) за други модели с различни форми на импулса $f(t)$, съответно друго запълване r , и сравняваме резултатите с точните (или числени) решения.

Във всички фигури избираме $|\Omega_0|/\Omega = |\Omega_1|/\Omega = 1/\sqrt{2}$, което съответства на X(NOT) гейт.

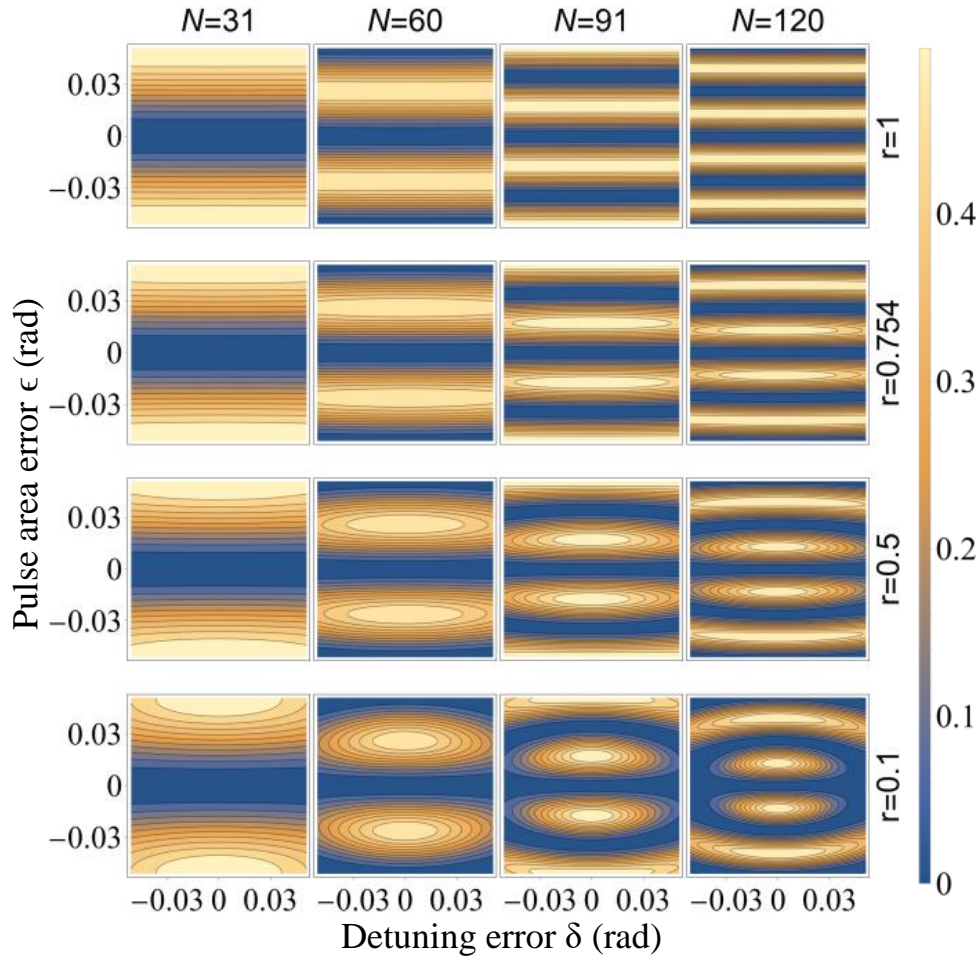
5.4.1 Определяне на γ

Чрез използване на връзки (5.17) и точното решение на модела на Раби (5.24), можем да получим мултипроцесните вероятности $P_a^{(N)}$, съгласно Eq. eqrefP123N. Според NR приближението (5.25) вероятността е

$$P_a^{(N)} = \frac{|\Omega_0|^2 \sin^2 \epsilon \sin^2 N\vartheta}{\Omega^2 \sin^2 \vartheta}, \quad (5.31)$$

където ϑ е дадено в Eq. (5.25д). Показано е на фиг. 5.3. Уравнение (5.31) дава почти идентични резултати в диапазона $|\delta| < 0,05$ и $|\epsilon| < 0,05$ като точния на фиг. 5.3 и поради това NR графиката на приближението не е показана.

От Фиг. 5.3 виждаме, че при малки δ мултипроцесната вероятност за преход $P_a^{(N)}$ зависи слабо



Фигура 5.3: Мултипроцесна вероятност $P_a^{(N)}$ според точните решения на модела на Раби (5.24). Графиките са почти идентични за NR приближението (5.31). За малки ϵ и δ , вероятността P_a зависи леко както от δ , така и от r и може да бъде приблизително изчислена съгласно уравнението (5.32). Това позволява грешката $\gamma = \epsilon$ да бъде определена от вероятността за мултипроцесно преход в Eq. (5.33). Стойностите на r са избрани с цел сравнение, тъй като те естествено се появяват за други форми на импулси в Sec. 5.5.

от δ и r и при $\delta = 0$ просто имаме

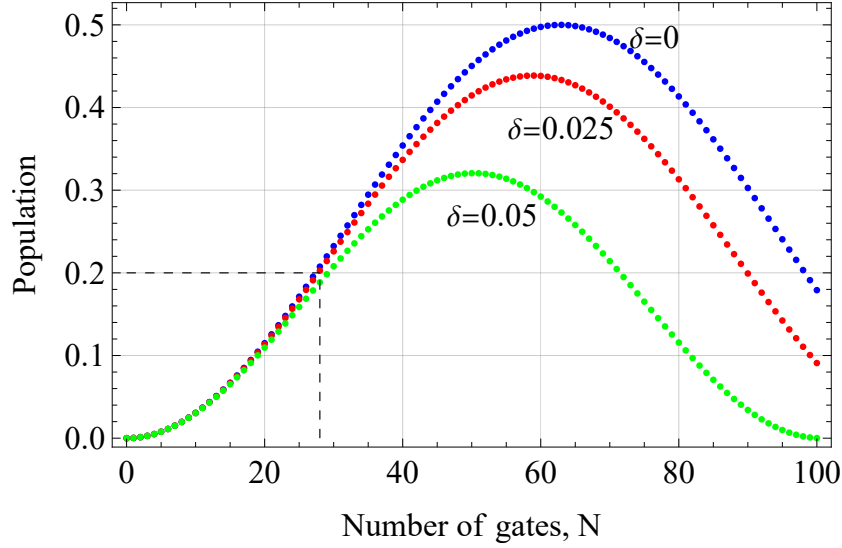
$$P_a^{(N)} = \frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} \sin^2(N\epsilon), \quad (5.32)$$

от което $\gamma = \epsilon$ може да се намери като

$$\gamma = \frac{1}{N} \arcsin \left[\frac{\Omega}{|\Omega_0|} \sqrt{P_a^{(N)}} \right]. \quad (5.33)$$

5.4.2 Определяне на α и β

След като вече сме определили грешката $\gamma = \epsilon$, продължаваме с определяне $\alpha = r\delta/2$. Намирайки α и знаейки стойността на r а priori, можем да намерим стойността на $\beta = \delta/2$ като просто $\beta = \alpha/r$. Затова фокусираме вниманието си върху определянето на α . Ще покажем, че в зависимост от коефициента на запълване r са необходими два подхода - един за $r < 0.5$ и друг за $r > 0.5$.



Фигура 5.4: Мултипроцесна вероятност $P_a^{(N)}$ според точните решения на модела на Раби (5.24) при $\epsilon = 0,025$ и $r = 0,25$. При по-малък брой повтарящи се гейтове N (областта с пунктирана линия), всички криви почти се припокриват при даден ϵ , което позволява да се определи $\gamma = \epsilon$. При по-големи N кривите се разминават, което позволява да се определи δ .

Определяне на α за $r < 0.5$

За $r < 0,5$, вероятността P_a зависи много силно от δ, r и N , което се вижда на фиг. 5.3. За вече известен ϵ (измерен при по-малък брой N), вижте по-горе, бихме могли да извършим друг експеримент с по-голям N . На фиг. 5.4 виждаме тези две области на вероятностите. Първата област (пунктирани линии) съответства на по-малкия N , където ϵ се определя за всяка стойност на δ . Точката на инфлексия е почти една и съща за всички криви и след нея кривите започват да се разминават за различни δ . Като използваме серията на Тейлър до δ^2 Eq. 5.31 намираме

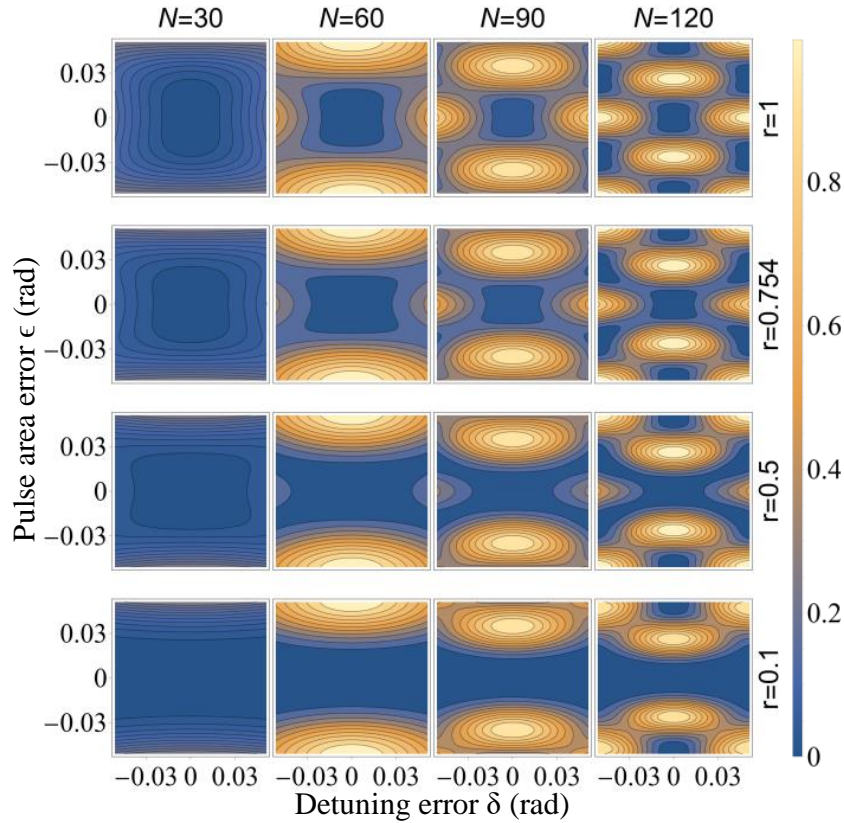
$$P_a^{(N)} = \frac{|\Omega_0|^2}{\Omega^2} \sin^2(N\epsilon) \times \left[1 - \frac{\delta^2(1-r)^2(1 - N\epsilon \cot N\epsilon)}{4\epsilon^2} \right], \quad (5.34)$$

от което може да се намери δ и съответно грешката $\alpha = r\delta/2$.

Определяне на α за $r > 0.5$

При $r > 0,5$ кривите на фиг. 5.4 се доближават една до друга и при $r = 1$ те се припокриват за всяко N . В този случай имаме нужда от други подходи, за да определим α . Чрез използване на подобен подход като в Eq. 5.4.1, връзки (5.17) и точното решение на модела на Раби (5.24), можем да намерим мултипроцесните вероятности $P_1^{(2M)}$ на Eq. (5.19), показано на фиг. 5.5. Съгласно NR приближението (5.25) вероятността е

$$P_1^{(2M)} = \frac{2|\Omega_0|^2|\Omega_1|^2}{\Omega^4} \left[1 - \cos \frac{N\delta}{2} \cos N\vartheta + \frac{\sin \frac{N\delta}{2} \sin N\vartheta \sin \frac{\delta(1-r)}{2}}{\sin \vartheta} - \frac{\sin^2 \epsilon \sin^2 N\vartheta}{2 \sin^2 \vartheta} \right]. \quad (5.35)$$



Фигура 5.5: Мултипроцесна вероятност $P_1^{(2M)}$. При известен ϵ и $r > 0,5$ детюнинг грешката δ може да бъде намерена числено. За малки $\epsilon \leq 0,005$, P_1 може да бъде приблизително изчислено според (5.36). За малки ϵ и $r < 0,5$, усилването не е достатъчно и е необходимо да се използват процедурите, описани в 5.4.2.

При NR приближението, вероятностите в уравнения (5.35) дават почти неразличими резултати като точните на фиг. 5.5 и следователно диаграмата на NR приближението не е показана. Ако r е известно приблизително, тогава δ може да се намери числено от Eq. (5.35).

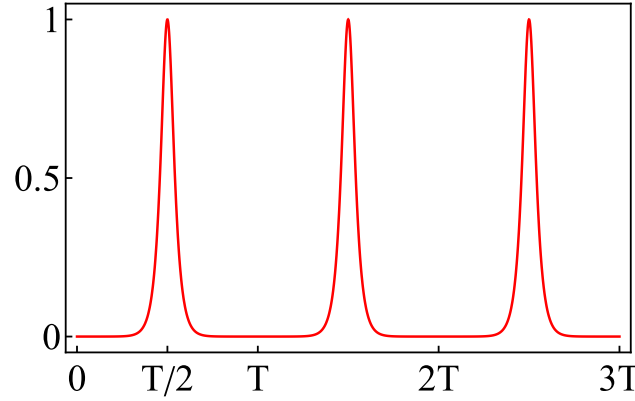
При малки стойности на ϵ ($\epsilon < 0.005$) вероятността може приблизително да се изрази като

$$P_1^{(2M)} \approx 4 \frac{|\Omega_0|^2 |\Omega_1|^2}{\Omega^4} \sin^2(N\delta r/4), \quad (5.36)$$

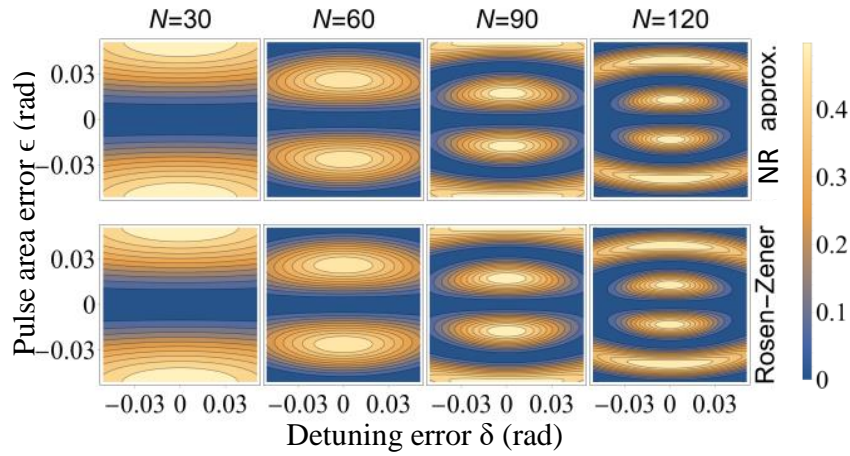
от където $\alpha = \delta r/2$ може да се намери.

5.5 Сравнение на NR приближението с други модели

В раздели 5.3.2 и 5.4 ние заявихме, че NR приближението почти съвпада с точния модел на Раби за диапазони на грешки до 0,05. В този раздел представяме резултати за три допълнителни модела с различни времеви зависимости $f(t)$ и коефициенти на запълване r и сравняваме резултатите с тези на NR приближението. Ще видим, че за Раманов кубит, контролиран от MS-Хамилтониан, NR приближението е удобно приближение и за други форми на импулси, което значително разширява приложимостта на NR подхода.



Фигура 5.6: Илюстрация на импулсите на времевата зависимост $f_{RZ}(t)$ за RZ модела (5.37) за $r = 0.1$.



Фигура 5.7: Сравнение между мултипроцесните вероятности $P_a^{(N)}$ получени от точните RZ решения (5.39) и NR приближението (5.31), при $r = 0.1$.

5.5.1 Розен-Зинер (RZ) модел

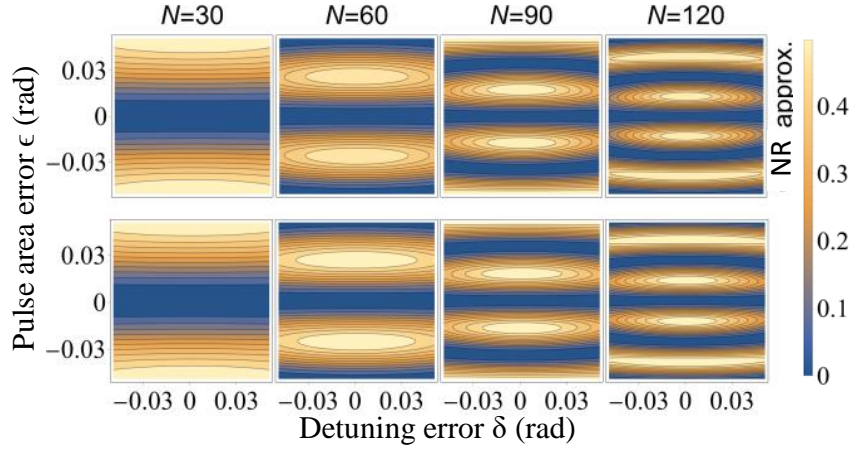
Моделът на Розен-Зинер (RZ) [RZ32], който приема форма на импулс с хиперболичен секанс $\text{sech}(t/T)$ в интервала от $-\infty$ до $+\infty$ е точно решим. Строго погледнато, дори един преход изисква безкрайно голяма продължителност, което означава коефициент на запълване $r \rightarrow 0$. Въпреки това, за такъв импулс с крайна продължителност $[-\tau, \tau]$, съкратен достатъчно далеч от своя максимум, така че $r \leq 0,1$ (което означава $\tau \geq 15,7T$, което от своя страна съответства на амплитудна стойност по-малка от 3×10^{-7} от максималната стойност), RZ моделът е практически точен. Съгласно допусканията в раздел 5.3.1 периодичната време-зависимост е

$$f_{RZ}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \text{sech} \left[\frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{T} - \frac{2n+1}{2} \right) \right], \quad (5.37)$$

показана на Фиг. 5.6. В този пример избираме коефициент на запълване $r = 0.1$

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T f_{RZ}(t) dt = 0.1. \quad (5.38)$$

Като се имат предвид условията в раздел 5.3.1, СК параметрите имат следното точно решение



Фигура 5.8: Мултипроцесни вероятности $P_a^{(N)}$. Горният ред показва NR приближението (5.31) за $r = 0,5$, а долният ред показва числено изчислената вероятност за времева зависимост съгласно уравнение. (5.40), което също съответства на $r = 0,5$.

$$a = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\delta r}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2\pi} + i\frac{\delta r}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\pi} + i\frac{\delta r}{2\pi}\right)}, \quad (5.39a)$$

$$b = -i \frac{\sin(A/2)}{\cosh(\delta r/2)} e^{-i\delta/2}. \quad (5.39b)$$

Мултипроцесните вероятности (5.19) могат да бъдат намерени от уравнения (5.39) и (5.17). На фиг. 5.7 показваме сравнението между точните (RZ) вероятности $P_a^{(N)}$ и NR апроксимираните (5.31). Вижда се, че и двата плота са практически еднакви за диапазона на грешка от 0,05. Графиките за вероятностите $P_1^{(2M)}$ не са показани, но те са практически неразличими от тези, показани на фиг. 5.5 за $r = 0,1$. Въз основа на тези констатации заключаваме, че NR приближението и методът за извеждане, представени в предходния раздел, са напълно приложими за sech импулси.

5.5.2 \sin^2 модел

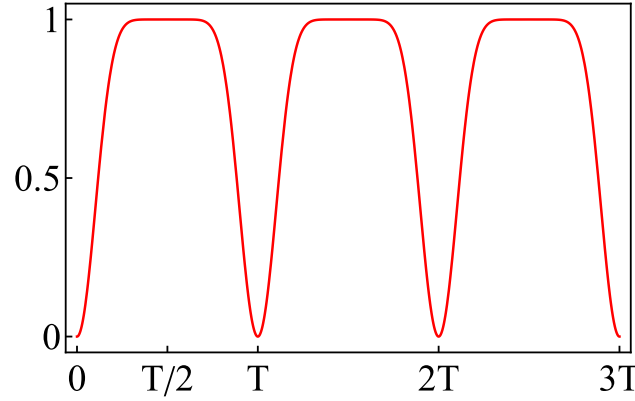
Сега представяме пример, където зависимостта от времето е

$$f_S(t) = \sin^2(\pi t/T). \quad (5.40)$$

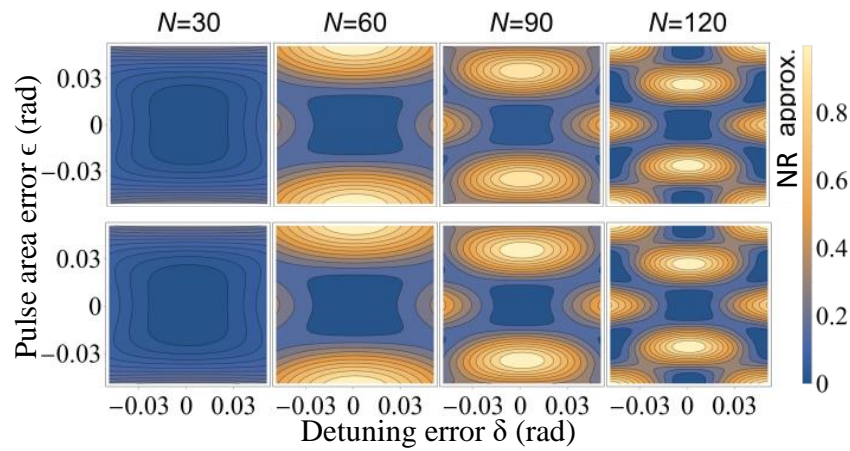
Ползата от такава форма на импулса е, че има добре дефинирана крайна продължителност (за разлика от формата на sech), гладка форма на импулса (за разлика от правоъгълния импулс), но за съжаление уравнението на Schrödinger не може да бъде решено аналитично. И все пак лесно се интегрира числено. Коефициентът на запълване за тази форма на импулса е

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T f_S(t) dt = 0.5. \quad (5.41)$$

Графиката на вероятността $P_a^{(N)}$ е показана на Фиг. 5.8. Приближението (NR) за същия коефициент на запълване $r = 0.5$ (горният ред) е почти идентично с числените резултати (долният ред). Графиките за популациите $P_1^{(2M)}$ не са показани, защото са много подобни на тези, показани на фиг. 5.5 за $r = 0,5$.



Фигура 5.9: Първите 3 импулса на време-зависимостта, съгласно Eq. (5.42), с коефициент на запълване $r = 0,754$.



Фигура 5.10: Мултипроцесни вероятности $P_1^{(2M)}$. Горният ред съответства на NR приближението (5.31) at $r = 0.754$. Долният ред се отнася до числено решена вероятност за времева зависимост, изразена в уравнение (5.42), което също съответства на $r = 0,754$.

5.5.3 Втори тригонометричен модел

Сега пристъпваме към друга числено решена форма на импулс с времевата зависимост от

$$f_C(t) = 1 - \cos^{10}[\pi t/T], \quad (5.42)$$

показано на фиг. 5.9. В сравнение с модела \sin^2 , той има коефициент на запълване $r = \frac{1}{T} \int_0^T f_C(t) dt = 0,754$, от където е изборът ни на r за съответните плотове за тази стойност на r на фигури 5.4 и 5.5.

За този модел, вместо да сравняваме $P_a^{(N)}$ и за да предоставим допълнителна информация, ние сравняваме вероятностите $P_1^{(2M)}$, както е показано на фиг. 5.10. Приближението на NR за същия коефициент на запълване, $r = 0,754$ (горен ред), е почти идентично с числените резултати (долния ред). Графиките за популациите $P_a^{(N)}$ не са показани, защото са много подобни на тези, показани на фиг. 5.3 за $r = 0,754$.

Глава 6

Заклучение

В тази работа бяха представени различни техники за томография и характеризирание на квантовите процеси. Общи принципи и методи в областта на квантовата томография с висока точност бяха въведени в глави 2 и 3. В глава 4 въведохме техника, наречена многопроцесна квантова томография (MQPT), която значително подобрява прецизността и точността на стандартната квантова процесна томография чрез използване на гейтови повторения мултипроцеси. Този подход служи като допълнение към стандартните методи с единично прилагане на изследвания гейт (SQPT и AAPT), като предлага по-ясна и ресурсно ефективна алтернатива на по-сложните и възискателни повтарящи се методи. Изследвахме както итеративните, така и линейните версии на MQPT и демонстрирахме приложението им към \sqrt{X} и CNOT гейтовете. Нашите симулационни модели оцениха точността и прецизността на метода, както и експерименталното им прилагане върху реалния процесор IBM Quantum `IBMQ_MANILA`. Констатациите показват, че докато всеки от линейните и итеративните MQPT методи има специфични предимства в зависимост от условията на томографията, и двата последователно облекчават ефектите от СПАМ и рийдаут грешките, както и статистическия шум.

Подчертаваме, че в сравнение с други методи за квантова томография, като рандомизиран бенчмаркинг, които дават само гейтовото фиделити, нашият метод предоставя цялата матрица на квантовия процес, Паули трансфер матрицата (PTM). Тази матрица съдържа пълната информация за конкретния процес, която може да се използва за извеждане на приноса на различните механизми за грешки. Обобщаващо можем да кажем, че MQPT методите са:

- проста и бърза добавка към стандартните техники при $N > 1$;
- въпреки, че не са супер точни както GST, те все пак са много по-точни от SQPT;
- не увеличават експерименталните и изчислителни разходи спрямо методите работещи с $N = 1$.

В глави 5 и 6 изследвахме кохерентни процеси и унитарни грешки. В глава 5 сме извели експлицитни аналитични формули, описващи взаимодействието на квантови системи с много състояния притежаващи симетрията на Wigner-Majorana, симетрията на Morris-Shore, или и двете, с управляващо поле, състоящо се от N идентични полета на единичния импулс. За единичното взаимодействие динамиката на тези системи може да се сведе до динамиката на една или повече системи с две състояния. Използвахме тази функция, за да извлечем пропагаторите за тези два типа системи по отношение на параметрите на пропагаторите с две състояния и броя на взаимодействията N . Тези отношения позволяват лесно да се открие състоянието на квантовата система за произволни начални условия.

Нашите резултати могат да намерят приложения в разработването на метод за квантов контрол за системи с много състояния чрез използване на добре познатите методи за системи с две състояния. По-специално, могат да се намерят точни аналитични решения за мултипроцесна динамика на системи с много състояния, като се използват добре познатите аналитични модели с едно преминаване и две състояния. Освен това, резултатите позволяват да се оцени ефективността на различни последователности на динамично отделяне за кубити и кюдити.

От друга страна, тези аналитични формули правят възможно разработването на прецизни методи за квантова процесна томография на системи с множество състояния (напр. кютрити и

кюдити като цяло, както и ансамбъл от няколко кюбита) чрез многократно прилагане на квантовия гейт, което бързо усилва своята изневяра до нива, които могат да бъдат измерени много точно [Vit20; Vit21]. Тогава аналитичните връзки между параметрите на еднопроцесния и мултипроцесния пропагатор позволяват да се изведат еднопроцесните от многопроцесните. По същия начин, нашите резултати позволяват да се проектират нови методи за квантов сензинг на малки честотни измествания с кюдити чрез усилване на техния ефект, измерване на усиления сигнал и след това извеждане на малката честотно изместване чрез аналитичните формули.

В Глава 6 представихме томографски метод, предназначен за характеризиране на високопрецизни гейтове на Раманови кюбити, които се подчиняват на трансформацията на Morris-Shore. Предложеният метод използва кохерентно усилване на грешките на гейта чрез повтаряне на един и същ гейт многократно. Чрез изследване на мултипроцесните вероятности ние установяваме тяхната зависимост от четири ключови параметъра: грешка в площта на импулса ϵ , грешка при денастройване δ , коефициент на запълване r и брой на импулсите (преминавания) N .

От тези изрази става възможно директното изчисляване на грешките ϵ и δ , които определят гейтовите грешките α , β , и γ . Тъй като Рамановата системата се редуцира до ефективна система с две състояния в режим на близък резонанс, използването на NR приближението с фактор на запълване r служи като удобен и практичен подход. Също така, това приближение може да бъде разширено до други форми на импулси, като по този начин се премахва ограничението на правоъгълната форма.

Допълнително предимство на този метод е фактът, че той не добавя никакви допълнителни изисквания в допълнение към тези за внедряването на Рамановия гейт, тъй като томографията се извършва чрез повтаряне на този гейт достатъчно много пъти. Наистина, единственото допълнително ограничение в нашия протокол е, че повторенията не трябва да надвишават кохерентните времена на кюбита.

Като цялостно обобщение можем да кажем, че техниките, базирани на повтарящи се процеси, са от решаващо значение за прецизната томография. Бъдещото развитие на усъвършенствани и бързи методи с дълга последователност ще доведе до непрекъснато подобряване на прецизността и точността на квантовата процесна томография.

Благодарности

На първо място, бих искал да изразя своята най-дълбока благодарност на моя академичен ръководител, уважаемия академик Николай Витанов, чийто опит, разбиране и търпение допринесоха изключително много за моя научен опит. Изказвам искрените си благодарности и на моите колеги: Иво Михов, Калоян Златанов, Светослав Иванов, Боян Торосов, Антон Рангелов, Бранислав Илич, Лидия Славова, Велизар Стоянов, Богомила Николова и Петър Иванов за техните безценни дискусии. Освен това съм благодарен на професор Клаус Мьолмер от института Нилс Бор и университета в Орхус за тяхното топло гостоприемство и стимулиращи разговори по време на моите посещения в техните лаборатории в Дания.

Второ, благодарността ми е и към Физическия факултет/Софийския университет за предоставянето на основните ресурси и съоръжения, които бяха от решаващо значение за моите изследователски начинания. Също така съм благодарен за финансовата подкрепа на моето изследване от European Quantum Flagship Project 820314 (MicroQC) и Българския национален план за възстановяване, устойчивост, договор BG-RRP-2.004-0008-C01 (SUMMIT), проект номер 3.1.4 и от Програмата за научни изследвания и иновации Horizon Europe на Европейския съюз по Споразумение за безвъзмездна помощ № 101046968 (BRISQ). Освен това, благодаря на Университета в Торонто за финансовата студентска подкрепа, която ми предоставиха по време на участието ми в ICAP27.

На трето място, дължа голяма благодарност на Техническия университет във Варна, където започнах академичния си път преди години, и на трима изключителни преподаватели оттам: проф. д-н. Дончо Дончев, доц. д-р. Юлий Стафунски и гл.ас. Христо Николов. Тяхното влияние и менторство оставиха незаличими следи върху моето научно и техническо развитие.

Четвърто, благодаря на Вестас България и лично на директора Валентин Иванов. Дадохте ми достойни възнаграждения, ценни знания и приятелство, чрез които поех по по-важните за мен пътища.

Накрая бих искал да благодаря на моето семейство. Вашата безгранична любов, постоянно насърчение и вяра в моите способности бяха в основата на моите академични занимания. Тази дисертация е свидетелство за вашата непоколебима подкрепа.

Списък с публикации

1. Stanchev, S. G., & Vitanov, N. V. (2023). Coherent interaction of multi-state quantum systems possessing the Wigner–Majorana and Morris–Shore dynamic symmetries with pulse trains. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 56(1), 014001. <https://doi.org/10.1088/1361-6455/acaa17>
2. Stanchev, S. G., & Vitanov, N. V. (2024). Characterization of high-fidelity Raman qubit gates. *Physical Review A*, 109(1), 012605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.012605>
3. Stanchev, S. G., & Vitanov, N. V. (2024). Multipass quantum process tomography: Precision and accuracy enhancement. arXiv preprint arXiv:2402.04128. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.04128>

Приноси

1. В статия (1) са изведени мултипроцесни пропагатори на различни видове квантови системи в кохерентен режим, с цел пост-експериментални изчисления за определяне на малки унитарни грешки, дължащи се на контролни неточности. Резултатите са използвани в статия (2).
2. В статия (2) използвайки мултипроцесорните пропагатори определени в (1), за конкретна система „Раманов кюбит“, се демонстрира томографски метод за определяне на малки гейтови грешки, чрез кохерентното им усилване. Анализа и симулациите показват, че в близко-резонансно приближение, такива системи могат прецизно да се контролират без особени изисквания на формата на импулса, при което работата е значително опростена.
3. В статия (3) е предложен метод, който подобрява точността и прецизността на процесната томография. Чрез експериментална и симулационна демонстрация върху едно и двукюбитни гейтове, метода показва значително подобрение спрямо стандартните томографски методи, без при това да увеличава експерименталните и изчислителни разходи в сравнение с тях. Метода намира матрицата на грешките, в която участват както унитарни така и неунитарни грешки.

Списък с участия в международни конференции

1. 14th European Conference on Atoms Molecules and Photons (ECAMP14) in Vilnius, Lithuania, June 27- July 1, 2022. (Poster)
2. 27th International Conference on Atomic Physics (ICAP 2022), 17 to 22 July, 2022, Toronto, Canada. (Poster)
3. Control of Quantum Dynamics of Atoms, Molecules and Ensembles by Light (CAMEL17) Workshop, Nessebar, Bulgaria, 29.08 - 02.09. 2022. (Presentation).
4. Control of Quantum Dynamics of Atoms, Molecules and Ensembles by Light (CAMEL18) Workshop, Nessebar, Bulgaria, 19.06 - 25.06. 2023. (Presentation).
5. DPG-Frühjahrstagung (DPG Spring Meeting) of the Atomic, Molecular, Quantum Optics and Photonics Section (SAMOP), Freiburg, Germany, 10.03. - 15.03.2024. (Poster).
6. First Annual Conference, Sofia University Marking Momentum for Innovation and Technological Transfer (SUMMIT), Sofia, Bulgaria, 23-24.04.2024. (Presentation).

Библиография

- [AE75] Leslie Allen and Joseph H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy 28. New York, NY: Wiley, 1975. 233 pp. ISBN: 978-0-471-02327-2.
- [AKN98] Dorit Aharonov, Alexei Kitaev, and Noam Nisan. “Quantum Circuits with Mixed States”. In: *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing - STOC '98*. The Thirtieth Annual ACM Symposium. Dallas, Texas, United States: ACM Press, 1998, 20–30. ISBN: 978-0-89791-962-3. DOI: [10.1145/276698.276708](https://doi.org/10.1145/276698.276708).
- [Alt+03] J. B. Altepeter et al. “Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography”. *Phys. Rev. Lett.* 90.19 (2003), 193601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.90.193601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.193601).
- [AQK23] Shahnawaz Ahmed, Fernando Quijandría, and Anton Frisk Kockum. “Gradient-Descent Quantum Process Tomography by Learning Kraus Operators”. *Phys. Rev. Lett.* 130.15 (2023), 150402. DOI: [10.1103/PhysRevLett.130.150402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.150402).
- [Bar+03] M. D. Barrett et al. “Sympathetic Cooling of 9 Be + and 24 Mg + for Quantum Logic”. *Phys. Rev. A* 68.4 (2003), 042302. DOI: [10.1103/PhysRevA.68.042302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.042302).
- [BB81] A. Bambini and P. R. Berman. “Analytic Solutions to the Two-State Problem for a Class of Coupling Potentials”. *Phys. Rev. A* 23.5 (1981), 2496–2501. DOI: [10.1103/PhysRevA.23.2496](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.23.2496).
- [Bia+10] R. C. Bialczak et al. “Quantum Process Tomography of a Universal Entangling Gate Implemented with Josephson Phase Qubits”. *Nature Phys* 6.6 (2010), 409–413. DOI: [10.1038/nphys1639](https://doi.org/10.1038/nphys1639).
- [Bli+04] B. B. Blinov et al. “Quantum Computing with Trapped Ion Hyperfine Qubits”. *Quantum Information Processing* 3.1-5 (2004), 45–59. DOI: [10.1007/s11128-004-9417-3](https://doi.org/10.1007/s11128-004-9417-3).
- [Bou+94] D. Boulfelfel et al. “Three-Dimensional Restoration of Single Photon Emission Computed Tomography Images”. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 41.5 (1994), 1746–1754. DOI: [10.1109/23.317385](https://doi.org/10.1109/23.317385).
- [BR45] F. Bloch and I. I. Rabi. “Atoms in Variable Magnetic Fields”. *Rev. Mod. Phys.* 17.2-3 (1945), 237–244. DOI: [10.1103/RevModPhys.17.237](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.17.237).
- [Cho72] Man-Duen Choi. “Positive Linear Maps on C^* -Algebras”. *Can. j. math.* 24.3 (1972), 520–529. DOI: [10.4153/CJM-1972-044-5](https://doi.org/10.4153/CJM-1972-044-5).
- [Cho75] Man-Duen Choi. “Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices”. *Linear Algebra and its Applications* 10.3 (1975), 285–290. DOI: [10.1016/0024-3795\(75\)90075-0](https://doi.org/10.1016/0024-3795(75)90075-0).
- [CN97] Isaac L. Chuang and M. A. Nielsen. “Prescription for Experimental Determination of the Dynamics of a Quantum Black Box”. *Journal of Modern Optics* 44.11-12 (1997), 2455–2467. DOI: [10.1080/09500349708231894](https://doi.org/10.1080/09500349708231894).
- [Com+19] Joshua Combes et al. *Forest Benchmarking: QCVV Using PyQuil*. Rep. v0.7.0. Zenodo, 2019. DOI: [10.5281/ZENODO.3455847](https://doi.org/10.5281/ZENODO.3455847).

- [cona] Qiskit contributors. *Building Noise Models - Qiskit Aer 0.13.1*. URL: https://qiskit.org/ecosystem/aer/tutorials/3_building_noise_models.html.
- [conb] Qiskit contributors. *MitigatedProcessTomography — Qiskit Experiments 0.5 0.5.4 Documentation*. URL: https://qiskit.org/ecosystem/experiments/stubs/qiskit_experiments_library.tomography.MitigatedProcessTomography.html.
- [con23] Qiskit contributors. *Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing*. 2023.
- [Cor22] Oliver Corfield. “Quantum Coherence in Trapped Ions”. PhD thesis. Imperial College London, 2022.
- [CP54] H. Y. Carr and E. M. Purcell. “Effects of Diffusion on Free Precession in Nuclear Magnetic Resonance Experiments”. *Phys. Rev.* 94.3 (1954), 630–638. DOI: [10.1103/PhysRev.94.630](https://doi.org/10.1103/PhysRev.94.630).
- [CS79] Richard J. Cook and Bruce W. Shore. “Coherent Dynamics of N -Level Atoms and Molecules. III. An Analytically Soluble Periodic Case”. *Phys. Rev. A* 20.2 (1979), 539–544. DOI: [10.1103/PhysRevA.20.539](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.539).
- [Dem64] Y. N. Demkov. “Charge Transfer at Small Resonance Defects”. *Sov. Phys. - JETP* 18 (1964), 138.
- [Eco+06] Sophia E. Economou et al. “Proposal for Optical $U(1)$ Rotations of Electron Spin Trapped in a Quantum Dot”. *Phys. Rev. B* 74.20 (2006), 205415. DOI: [10.1103/PhysRevB.74.205415](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.205415).
- [Ega21] L. N. Egan. “Scaling Quantum Computers with Long Chains of Trapped Ions”. PhD thesis. Joint Quantum Institute, 2021.
- [FH01] Jaromír Fiurášek and Zdeněk Hradil. “Maximum-Likelihood Estimation of Quantum Processes”. *Phys. Rev. A* 63.2 (2001), 020101. DOI: [10.1103/PhysRevA.63.020101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.020101).
- [Fin+19] Daniel Finkelstein-Shapiro et al. “Classification of Dark States in Multilevel Dissipative Systems”. *Phys. Rev. A* 99.5 (2019), 053829. DOI: [10.1103/PhysRevA.99.053829](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.053829).
- [Gae+16] J. P. Gaebler et al. “High-Fidelity Universal Gate Set for $\text{Be } 9 + \text{ Ion}$ Qubits”. *Phys. Rev. Lett.* 117.6 (2016), 060505. DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.060505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.060505).
- [GKS76] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. “Completely Positive Dynamical Semigroups of N -Level Systems”. *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (1976), 821–825. DOI: [10.1063/1.522979](https://doi.org/10.1063/1.522979).
- [Gre15] Daniel Greenbaum. *Introduction to Quantum Gate Set Tomography*. 2015. arXiv: [1509.02921](https://arxiv.org/abs/1509.02921). preprint.
- [Gué+19] D. Guéry-Odelin et al. “Shortcuts to Adiabaticity: Concepts, Methods, and Applications”. *Rev. Mod. Phys.* 91.4 (2019), 045001. DOI: [10.1103/RevModPhys.91.045001](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045001).
- [HC85] F. T. Hioe and C. E. Carroll. “Two-State Problems Involving Arbitrary Amplitude and Frequency Modulations”. *Phys. Rev. A* 32.3 (1985), 1541–1549. DOI: [10.1103/PhysRevA.32.1541](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.32.1541).

- [Hio84] F. T. Hioe. “Solution of Bloch Equations Involving Amplitude and Frequency Modulations”. *Phys. Rev. A* 30.4 (1984), 2100–2103. DOI: [10.1103/PhysRevA.30.2100](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.30.2100).
- [Hio87] F. T. Hioe. “N-Level Quantum Systems with SU(2) Dynamic Symmetry”. *J. Opt. Soc. Am. B* 4.8 (1987), 1327. DOI: [10.1364/JOSAB.4.001327](https://doi.org/10.1364/JOSAB.4.001327).
- [Hug+97] R. J. Hughes et al. “The Los Alamos Trapped Ion Quantum Computer Experiment”. Version 1 (1997). DOI: [10.48550/ARXIV.QUANT-PH/9708050](https://doi.org/10.48550/ARXIV.QUANT-PH/9708050).
- [IBM23] IBM Quantum. *ibmq_manila (Falcon r5.11L)*. 2023.
- [Jam+01] Daniel F. V. James et al. “Measurement of Qubits”. *Phys. Rev. A* 64.5 (2001), 052312. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.052312](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.052312).
- [Jam+98] D. F. V. James et al. “Trapped Ion Quantum Computer Research at Los Alamos”. Version 1 (1998). DOI: [10.48550/ARXIV.QUANT-PH/9807071](https://doi.org/10.48550/ARXIV.QUANT-PH/9807071).
- [Jam72] A. Jamiołkowski. “Linear Transformations Which Preserve Trace and Positive Semidefiniteness of Operators”. *Reports on Mathematical Physics* 3.4 (1972), 275–278. DOI: [10.1016/0034-4877\(72\)90011-0](https://doi.org/10.1016/0034-4877(72)90011-0).
- [JNN13] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. “QuTiP 2: A Python Framework for the Dynamics of Open Quantum Systems”. *Computer Physics Communications* 184.4 (2013), 1234–1240. DOI: [10.1016/j.cpc.2012.11.019](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019).
- [Kim+15] Hyosub Kim et al. “Rabi Oscillations of Morris-Shore–Transformed N -State Systems by Elliptically Polarized Ultrafast Laser Pulses”. *Phys. Rev. A* 91.5 (2015), 053421. DOI: [10.1103/PhysRevA.91.053421](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053421).
- [Kir+17] T. Kirova et al. “Hyperfine Interaction in the Autler-Townes Effect: The Formation of Bright, Dark, and Chameleon States”. *Phys. Rev. A* 96.4 (2017), 043421. DOI: [10.1103/PhysRevA.96.043421](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.043421).
- [Kis+04] Z. Kis et al. “Stimulated Raman Adiabatic Passage among Degenerate-Level Manifolds”. *Phys. Rev. A* 70.5 (2004), 053405. DOI: [10.1103/PhysRevA.70.053405](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.053405).
- [Kit97] A Yu Kitaev. “Quantum Computations: Algorithms and Error Correction”. *Russ. Math. Surv.* 52.6 (1997), 1191–1249. DOI: [10.1070/RM1997v052n06ABEH002155](https://doi.org/10.1070/RM1997v052n06ABEH002155).
- [Kra+83] Karl Kraus et al., eds. *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory*. Vol. 190. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1983. ISBN: 978-3-540-12732-1 978-3-540-38725-1. DOI: [10.1007/3-540-12732-1](https://doi.org/10.1007/3-540-12732-1).
- [Kra71] K Kraus. “General State Changes in Quantum Theory”. *Annals of Physics* 64.2 (1971), 311–335. DOI: [10.1016/0003-4916\(71\)90108-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(71)90108-4).
- [KV06] E. S. Kyoseva and N. V. Vitanov. “Coherent Pulsed Excitation of Degenerate Multistate Systems: Exact Analytic Solutions”. *Phys. Rev. A* 73.2 (2006), 023420. DOI: [10.1103/PhysRevA.73.023420](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.023420).
- [KVS07] E. S. Kyoseva, N. V. Vitanov, and B. W. Shore. “Physical Realization of Coupled Hilbert-space Mirrors for Quantum-State Engineering”. *Journal of Modern Optics* 54.13-15 (2007), 2237–2257. DOI: [10.1080/09500340701352060](https://doi.org/10.1080/09500340701352060).

- [Lan32] L.D. Landau. “On the Theory of Transfer of Energy at Collisions II”. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* 2 (1932), 46–51.
- [Lee22] Chungsun Lee. “Characterisation and Control of Trapped-ion Qubit”. PhD thesis. Imperial College London, 2022.
- [Lei+03] D. Leibfried et al. “Quantum Dynamics of Single Trapped Ions”. *Rev. Mod. Phys.* 75.1 (2003), 281–324. DOI: [10.1103/RevModPhys.75.281](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281).
- [Lin76] G. Lindblad. “On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups”. *Commun.Math. Phys.* 48.2 (1976), 119–130. DOI: [10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499).
- [Mag+12] Easwar Magesan et al. “Efficient Measurement of Quantum Gate Error by Interleaved Randomized Benchmarking”. *Phys. Rev. Lett.* 109.8 (2012), 080505. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.080505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.080505).
- [Maj32] Ettore Majorana. «Atomi orientati in campo magnetico variabile». *Nuovo Cim* 9.2 (1932), 43–50. DOI: [10.1007/BF02960953](https://doi.org/10.1007/BF02960953).
- [McC18] John McCann. “A Novel Approach to Single Ion Addressing by Means of a Multicore Photonic Crystal Fibre”. MA thesis. ETH Zürich, 2018.
- [McK+17] David C. McKay et al. “Efficient Z Gates for Quantum Computing”. *Phys. Rev. A* 96.2 (2017), 022330. DOI: [10.1103/PhysRevA.96.022330](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.022330).
- [Mer+13] Seth T. Merkel et al. “Self-Consistent Quantum Process Tomography”. *Phys. Rev. A* 87.6 (2013), 062119. DOI: [10.1103/PhysRevA.87.062119](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.062119).
- [MG58] S. Meiboom and D. Gill. “Modified Spin-Echo Method for Measuring Nuclear Relaxation Times”. *Review of Scientific Instruments* 29.8 (1958), 688–691. DOI: [10.1063/1.1716296](https://doi.org/10.1063/1.1716296).
- [MRL08] M. Mohseni, A. T. Rezakhani, and D. A. Lidar. “Quantum-Process Tomography: Resource Analysis of Different Strategies”. *Phys. Rev. A* 77.3 (2008), 032322. DOI: [10.1103/PhysRevA.77.032322](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.032322).
- [MS83] James R. Morris and Bruce W. Shore. “Reduction of Degenerate Two-Level Excitation to Independent Two-State Systems”. *Phys. Rev. A* 27.2 (1983), 906–912. DOI: [10.1103/PhysRevA.27.906](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.27.906).
- [NC12] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. 1-е изд. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 978-1-107-00217-3 978-0-511-97666-7. DOI: [10.1017/CB09780511976667](https://doi.org/10.1017/CB09780511976667).
- [Nie+21] Erik Nielsen et al. “Gate Set Tomography”. *Quantum* 5 (2021), 557. DOI: [10.22331/q-2021-10-05-557](https://doi.org/10.22331/q-2021-10-05-557).
- [Nik62] E. E. Nikitin. “Resonance and Non-Resonance Intermolecular Energy Exchange in Molecular Collisions”. *Discuss. Faraday Soc.* 33 (1962), 14. DOI: [10.1039/df9623300014](https://doi.org/10.1039/df9623300014).
- [OBr+04] J. L. O’Brien et al. “Quantum Process Tomography of a Controlled-NOT Gate”. *Phys. Rev. Lett.* 93.8 (2004), 080502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.93.080502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.080502).

- [PCZ97] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller. “Complete Characterization of a Quantum Process: The Two-Bit Quantum Gate”. *Phys. Rev. Lett.* 78.2 (1997), 390–393. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.390](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.390).
- [Rab37] I. I. Rabi. “Space Quantization in a Gyating Magnetic Field”. *Phys. Rev.* 51.8 (1937), 652–654. DOI: [10.1103/PhysRev.51.652](https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.652).
- [Ran+18] J. Randall et al. “Generation of High-Fidelity Quantum Control Methods for Multilevel Systems”. *Phys. Rev. A* 98.4 (2018), 043414. DOI: [10.1103/PhysRevA.98.043414](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.043414).
- [Rie+06] M. Riebe et al. “Process Tomography of Ion Trap Quantum Gates”. *Phys. Rev. Lett.* 97.22 (2006), 220407. DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.220407](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.220407).
- [RMM24] Simone Roncallo, Lorenzo Maccone and Chiara Macchiavello. “Pauli Transfer Matrix Direct Reconstruction: Channel Characterization without Full Process Tomography?”. *Quantum Sci. Technol.* 9.1 (2024), 015010. DOI: [10.1088/2058-9565/ad04e7](https://doi.org/10.1088/2058-9565/ad04e7).
- [Rod+14] Andrey V. Rodionov et al. “Compressed Sensing Quantum Process Tomography for Superconducting Quantum Gates”. *Phys. Rev. B* 90.14 (2014), 144504. DOI: [10.1103/PhysRevB.90.144504](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.144504).
- [RVS06] A. A. Rangelov, N. V. Vitanov, and B. W. Shore. “Extension of the Morris-Shore Transformation to Multilevel Ladders”. *Phys. Rev. A* 74.5 (2006), 053402. DOI: [10.1103/PhysRevA.74.053402](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.053402).
- [RZ32] N. Rosen and C. Zener. “Double Stern-Gerlach Experiment and Related Collision Phenomena”. *Phys. Rev.* 40.4 (1932), 502–507. DOI: [10.1103/PhysRev.40.502](https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.502).
- [Sal55] Harold Salwen. “Resonance Transitions in Molecular Beam Experiments. I. General Theory of Transitions in a Rotating Magnetic Field”. *Phys. Rev.* 99.4 (1955), 1274–1286. DOI: [10.1103/PhysRev.99.1274](https://doi.org/10.1103/PhysRev.99.1274).
- [SÁS12] Alexandre M. Souza, Gonzalo A. Álvarez, and Dieter Suter. “Robust Dynamical Decoupling”. *Phil. Trans. R. Soc. A* 370.1976 (2012), 4748–4769. DOI: [10.1098/rsta.2011.0355](https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0355).
- [SC11] Caiqin Song and Guoliang Chen. “An Efficient Algorithm for Solving Extended Sylvester-conjugate Transpose Matrix Equations”. *Arab Journal of Mathematical Sciences* 17.2 (2011), 115–134. DOI: [10.1016/j.ajmsc.2011.03.003](https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2011.03.003).
- [Sch09] S. A. Schulz. “Scalable Microchip Ion Traps for Quantum Computation”. PhD thesis. Ulm University, 2009.
- [Sho11] Bruce W. Shore. *Manipulating Quantum Structures Using Laser Pulses*. 1-е изд. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 978-0-521-76357-8 978-0-511-67571-3. DOI: [10.1017/CB09780511675713](https://doi.org/10.1017/CB09780511675713).
- [Sho14] Bruce W. Shore. “Two-State Behavior in N -State Quantum Systems: The Morris-Shore Transformation Reviewed”. *Journal of Modern Optics* 61.10 (2014), 787–815. DOI: [10.1080/09500340.2013.837205](https://doi.org/10.1080/09500340.2013.837205).
- [Sho90] Bruce W. Shore. *The Theory of Coherent Atomic Excitation*. New York: Wiley, 1990. 2 pagetotals. ISBN: 978-0-471-52417-5 978-0-471-61398-5 978-0-471-52416-8.

- [SIT21] Takanori Sugiyama, Shinpei Imori, and Fuyuhiko Tanaka. “Self-Consistent Quantum Tomography with Regularization”. *Phys. Rev. A* 103.6 (2021), 062615. DOI: [10.1103/PhysRevA.103.062615](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.062615).
- [SJH85] M. S. Silver, R. I. Joseph, and D. I. Hoult. “Selective Spin Inversion in Nuclear Magnetic Resonance and Coherent Optics through an Exact Solution of the Bloch-Riccati Equation”. *Phys. Rev. A* 31.4 (1985), 2753–2755. DOI: [10.1103/PhysRevA.31.2753](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.2753).
- [Sti55] W. Forrest Stinespring. “Positive Functions on C*-Algebras”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 6.2 (1955), 211. DOI: [10.2307/2032342](https://doi.org/10.2307/2032342).
- [Stü32] E.C.G. Stückelberg. “Theory of Inelastic Collisions between Atoms”. *Helvetica Physica Acta* 5 (1932), 369–423.
- [SV23] Sticho G Stanchev and Nikolay V Vitanov. “Coherent Interaction of Multistate Quantum Systems Possessing the Wigner–Majorana and Morris–Shore Dynamic Symmetries with Pulse Trains”. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 56.1 (2023), 014001. DOI: [10.1088/1361-6455/acaa17](https://doi.org/10.1088/1361-6455/acaa17).
- [SV24a] Sticho G. Stanchev and Nikolay V. Vitanov. “Characterization of High-Fidelity Raman Qubit Gates”. *Phys. Rev. A* 109.1 (2024), 012605. DOI: [10.1103/PhysRevA.109.012605](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.012605).
- [SV24b] Sticho G. Stanchev and Nikolay V. Vitanov. “Multipass Quantum Process Tomography: Precision and Accuracy Enhancement”. *Bep.* 1 (2024). DOI: [10.48550/ARXIV.2402.04128](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2402.04128).
- [Tin+21] Holly N Tinkey et al. “Quantum Process Tomography of a Mølmer-Sørensen Gate via a Global Beam”. *Quantum Sci. Technol.* 6.3 (2021), 034013. DOI: [10.1088/2058-9565/ac0543](https://doi.org/10.1088/2058-9565/ac0543).
- [TV12] Boyan T Torosov and Nikolay V Vitanov. “Adiabatic Elimination of a Nearly Resonant Quantum State”. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 45.13 (2012), 135502. DOI: [10.1088/0953-4075/45/13/135502](https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/13/135502).
- [TV20] Boyan T. Torosov and Nikolay V. Vitanov. “High-Fidelity Composite Quantum Gates for Raman Qubits”. *Phys. Rev. Research* 2.4 (2020), 043194. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.2.043194](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.043194).
- [Vit+01] Nikolay V Vitanov et al. “Laser-Induced Population Transfer by Adiabatic Passage Techniques”. *Annu. Rev. Phys. Chem.* 52.1 (2001), 763–809. DOI: [10.1146/annurev.physchem.52.1.763](https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.52.1.763).
- [Vit+17] Nikolay V. Vitanov et al. “Stimulated Raman Adiabatic Passage in Physics, Chemistry, and Beyond”. *Rev. Mod. Phys.* 89.1 (2017), 015006. DOI: [10.1103/RevModPhys.89.015006](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.015006).
- [Vit00] N V Vitanov. “Measuring a Coherent Superposition of Multiple States”. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 33.12 (2000), 2333–2346. DOI: [10.1088/0953-4075/33/12/314](https://doi.org/10.1088/0953-4075/33/12/314).
- [Vit18] Nikolay V. Vitanov. “Relations between the Single-Pass and Double-Pass Transition Probabilities in Quantum Systems with Two and Three States”. *Phys. Rev. A* 97.5 (2018), 053409. DOI: [10.1103/PhysRevA.97.053409](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.053409).

- [Vit20] Nikolay V Vitanov. “Relations between Single and Repeated Qubit Gates: Coherent Error Amplification for High-Fidelity Quantum-Gate Tomography?” *New J. Phys.* 22.2 (2020), 023015. DOI: [10.1088/1367-2630/ab6a38](https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab6a38).
- [Vit21] Nikolay V. Vitanov. “Quantum Sensing of Weak Electric and Magnetic Fields by Coherent Amplification of Energy-Level-Shift Effects”. *Phys. Rev. A* 103.6 (2021), 063104. DOI: [10.1103/PhysRevA.103.063104](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.063104).
- [VK95] Nikolay V. Vitanov and Peter L. Knight. “Coherent Excitation of a Two-State System by a Train of Short Pulses”. *Phys. Rev. A* 52.3 (1995), 2245–2261. DOI: [10.1103/PhysRevA.52.2245](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.2245).
- [VKS03] N. V. Vitanov, Z. Kis, and B. W. Shore. “Coherent Excitation of a Degenerate Two-Level System by an Elliptically Polarized Laser Pulse”. *Phys. Rev. A* 68.6 (2003), 063414. DOI: [10.1103/PhysRevA.68.063414](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.063414).
- [VS97] N. V. Vitanov and K.-A. Suominen. “Time-Dependent Control of Ultracold Atoms in Magnetic Traps”. *Phys. Rev. A* 56.6 (1997), R4377–R4380. DOI: [10.1103/PhysRevA.56.R4377](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.R4377).
- [VW28] J. V. Neumann und E. Wigner. „Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons“. *Z. Physik* 49.1-2 (1928), 73–94. DOI: [10.1007/BF01327823](https://doi.org/10.1007/BF01327823).
- [Wat09] John Watrous. “Semidefinite Programs for Completely Bounded Norms”. *Theory of Comput.* 5.1 (2009), 217–238. DOI: [10.4086/toc.2009.v005a011](https://doi.org/10.4086/toc.2009.v005a011).
- [Wat13] John Watrous. “Simpler Semidefinite Programs for Completely Bounded Norms”. *Chicago J. of Theoretical Comp. Sci.* 19.1 (2013), 1–19. DOI: [10.4086/cjtcs.2013.008](https://doi.org/10.4086/cjtcs.2013.008).
- [Wig31] Eugen Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atom-spektren*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1931. ISBN: 978-3-663-00642-8 978-3-663-02555-9. DOI: [10.1007/978-3-663-02555-9](https://doi.org/10.1007/978-3-663-02555-9).
- [Win+98] D.J. Wineland et al. “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 103.3 (1998), 259. DOI: [10.6028/jres.103.019](https://doi.org/10.6028/jres.103.019).
- [YM69] Y. N. Demkov and M. Kunike. “Hypergeometric Model for Two-State Approximation in Collision Theory [in Russian]”. *Vestn. Leningr. Univ. Fiz. Khim* 16 (1969), 39.
- [Zak85] Jakub Zakrzewski. “Analytic Solutions of the Two-State Problem for a Class of Chirped Pulses”. *Phys. Rev. A* 32.6 (1985), 3748–3751. DOI: [10.1103/PhysRevA.32.3748](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.32.3748).
- [Zen32] C Zener. “Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels”. *Proc. R. Soc. Lond. A. A* 137.833 (1932), 696–702. DOI: [10.1098/rspa.1932.0165](https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0165).
- [ZRV22] K N Zlatanov, A A Rangelov, and N V Vitanov. “Extension of the Morris–Shore Transformation to Arbitrary Time-Dependent Driving Fields”. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 55.20 (2022), 204001. DOI: [10.1088/1361-6455/ac8d3f](https://doi.org/10.1088/1361-6455/ac8d3f).

- [ZVV20] K. N. Zlatanov, G. S. Vasilev, and N. V. Vitanov. “Morris-Shore Transformation for Nondegenerate Systems”. *Phys. Rev. A* 102.6 (2020), 063113. DOI: [10.1103/PhysRevA.102.063113](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.063113).