Авторска справка за приносния характер на трудовете

Първан Е. Първанов

След защитата на дисертация за придобиване на образователна и научна степен доктор през 2000 година изследователската ми работа в областта на теорията на апроксимациите доведе до резултати, попадащи в следните три основни направления:

- теглови приближения с оператори от тип на Гудман-Шарма;
- най-добри приближения с тригонометрични полиноми;
- оценка на грешката на квадратурната формула на Симпсън с помощта на усреднени модули на гладкост.

1 Прави и обратни теореми за теглови приближения с оператори от тип на Гудман-Шарма в термините на подходящи K-функционали.

Операторът от тип на Бернщайн разгледан от Гудман и Шарма в [9] and [10]

$$\begin{aligned} U_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} u_{n,k}(f) P_{n,k}(x) \\ &= f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(y)f(y)dy, \end{aligned}$$

където $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ а f е интегруема по Лебег в $(0,1)$ функция с крайни граници в 0 и 1, бе обект на обстойно изследване в дисертацията ми, като резултатите от съвместната ни работа с Б. Попов бяха публикувани в [19]. Получените в хода на доказателството на права и обратна теорема от силен вид "A"(по терминологията на [5]) елегантни свойства на оператора предполагаха по-нататъшни изследвания. По идея на проф. дмн К. Иванов през 2007 година започнахме изследване на приближения с тегла от полиномиален вид с ефект в крайщата. Първоначално изследвахме горепосочения оператор, а после и други два оператора от интегрален вид с подобнии свойства.

1.1 Оценка на тегловите приближения с оператора на Гудман-Шарма с помощта на подходящи K-функционали.

Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [13].

Разглеждаме теглови функции

$$w(x) = w(\gamma_0, \gamma_1; x) = x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1} \text{ за } x \in (0,1) \text{ и } \gamma_0, \gamma_1 \in [-1, 0]. \tag{1.1}$$

С $\varphi(x) = x(1-x)$ означаваме естествено свързаното с вторите производни на операторите на Бернщайн и Гудман-Шарма тегло. Производните означаваме с $D = \frac{d}{dx}$.

С $C[0,1]$, както обикновено означаваме класа на непрекъснатите в $[0,1]$ функции комплектовано с равномерна норма $\|\cdot\|$, а с $L_\infty[0,1]$ - измеримите по Лебег и ограничени в $[0,1]$ функции. За теглото w дефинираме $C(w)[0,1] = \{f \in C[0,1] : wf \in L_\infty[0,1]\}$ и

$$W^2(w\varphi)[0,1] = \left\{g, g' \in AC_{loc}(0,1) : w\varphi D^2 g \in L_\infty[0,1]\right\},$$

където $AC_{loc}(0,1)$ се състои от абсолютно непрекъснатите в $[a,b]$ функции за всеки $[a,b] \subset (0,1)$. Нека $C_0(w)[0,1] = \{f \in C(w)[0,1] \;:\; f(0) = f(1) = 0\}$, а $W_0^2(w\varphi)[0,1]$ е подмножеството на $W^2(w\varphi)[0,1]$ от функции g удовлетворяващи допълнително

$$\lim_{x\to 0+0} \varphi(x)D^2 g(x) = \lim_{x\to 1-0} \varphi(x)D^2 g(x) = 0.$$

Оценките за тегловите апроксимации с U_n за функции от $C_0(w)[0,1] + \pi_1$ са получени с помощта на К-функционала

$$K_w(f,t) = \inf\left\{\|w(f-g)\| + t\|w\varphi D^2 g\| : g \in W^2(w\varphi)[0,1]\right\}.$$

Основният резултат е Теорема 1.1, съдържаща права (1.2) и силна обратна теорема от вид А (1.3) в терминологията на [5].

Теорема. Нека $w = w(\gamma_0, \gamma_1)$ е зададено с (1.1). Тогава съществува абсолютна константа M, такава че за всяка $f \in C(w)[0,1] + \pi_1$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\|w(f - U_n f)\| \le 2K_w\left(f, \frac{1}{2n}\right), \tag{1.2}$$

$$K_w\left(f, \frac{1}{2n}\right) \le \left(\frac{162 + 9\sqrt{2}}{28} + \frac{M}{n}\right)\|w(f - U_n f)\|. \tag{1.3}$$

Този резултат обобщава резултата от [19], който се отнася за случая $w = 1$.

В доказателството на теоремата съществено се използват елегантните свойства на оператора: запазване на линейните функции, комутиране със себе си ($U_n U_m f = U_m U_n f$) и с диференциалния оператор φD^2 (Лема 2.2) и представянето в Лема 2.1. Последните две съществено улесняват доказателството на обратната теорема. В хода на което, също така са доказани неравенство от тип на Вороновская (Лема 4.1) и особено същественото за тегловата апроксимация неравенство от тип на Бернщайн (Лема 4.2). Трябва също така да се отбележи, че за разлика от [19], тук в доказателството на обратната теорема се използва втора итерация на оператора ($U_n^2 f = U_n U_n f$). Причината е, че при използване на първа итерация, константата в неравенството на Бернщайн е по-голяма от 4, а константата в неравенството на Вороновская е по порядък $\frac{1}{4}$. Тогава произведението на тези две константи е по-голямо от 1, а това прави невъзможно получаването на обратна теорема.

1.2 Оценка на тегловите приближения с модификацията по Гудман-Шарма на оператора на Баскаков с помощта на подходящи K-функционали.

Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [14].

През 1957 В.А. Баскаков [2] въвежда линейния положителен оператор

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

за приближаване на ограничена и непрекъсната в $[0, \infty)$ функция f, където $P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ са базисните функции на Баскаков.

Модификацията по Гудман-Шарма на оператора на Баскаков се дефинира за всяко естествено n като

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) v_{n,k}(f)$$

$$v_{n,0}(f) = f(0); \quad v_{n,k}(f) = (n+1) \int_0^{\infty} P_{n+2,k-1}(y) f(y)\, dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

където f е измерима по Лебег в $(0, \infty)$ крайна граница $f(0)$ в 0. Операторът V_n е въведен през 2005 от Золтан Финта в [8].

Разглеждаме теглови функции

(1.4)
$$w(x) = w(\gamma_0, \gamma_\infty; x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\gamma_0} (1+x)^{\gamma_\infty} \text{ за } x \in [0, \infty) \text{ и } \gamma_0, \gamma_\infty \in [-1, 0].$$

С $\psi(x) = x(1+x)$ означаваме естествено свързаното с вторите производни на операторите от тип на Баскаков тегло. Производните означаваме с $D = \frac{d}{dx}$.

С $C[0, \infty)$ означаваме класа на непрекъснатите в $[0, \infty)$ функции. За функциите от $C[0, \infty)$ не изискваме ограниченост или равномерна непрекъснатост. Нека $L_\infty[0, \infty)$ е пространството от измеримите по Лебег и съществено ограничени в $[0, \infty)$ функции, комплектовано с равномерна норма$\|\cdot\|$. За теглото w дефинираме $C(w) = \{f \in C[0, \infty) : wf \in L_\infty[0, \infty)\}$ и

$$W^2(w\psi) = \left\{g, g' \in AC_{loc}(0, \infty) : w\psi D^2 g \in L_\infty[0, \infty)\right\},$$

където $AC_{loc}(0,\infty)$ се състои от абсолютно непрекъснатите в $[a,b]$ функции за всеки $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Нека $C_0(w)=\{f\in C(w): f(0)=0\}$. По същия начин с $W_0^2(w\psi)$ - подмножеството на $W^2(w\psi)$ функции g удовлетворяващи допълнително

$$\lim_{x\to 0+0}\ \psi(x)D^2g(x)=0.$$

Тегловите приближения с оператора V_n се оценяват с K-функционала между тегловите пространства $C(w)$ и $W^2(w\psi)$, който за всяка функция

$$f\in C(w)+W^2(w\psi)=\{f_1+f_2: f_1\in C(w), f_2\in W^2(w\psi)\}$$

и $t>0$ се дефинира чрез

$$K_w(f,t)=\inf\left\{\|w(f-g)\|+t\|w\psi D^2g\|: g\in W^2(w\psi), f-g\in C(w)\right\}.$$

Основният резултат в [14] е Теорема 1.1, съдържаща права и силна обратна теорема от вид A

Теорема. Нека $w=w(\gamma_0,\gamma_\infty)$ е зададено с (1.4). Тогава за всяка $f\in C(w)+W^2(w\psi)$ и всяко $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$, е в сила

$$\|w(f-V_nf)\|\leq 2K_w\left(f,\frac{1}{2n}\right)\leq 13.7\|w(f-V_nf)\|.$$

В работата са получени аналози на всички основни свойства на оператора на Гудман-Шарма. Доказани са също така неравенства от тип на Вороновская и от тип на Бернщайн, като първото е с "чиста"константа $\frac{1}{4}$.

1.3 Оценка на тегловите приближения с модификацията по Гудман-Шарма на оператора на Майер-Кьоних и Целер с помощта на подходящи K-функционали.

Това са резултатите от съвместната ни с К. Иванов работа [15].

Операторът на Майер-Кьоних и Целер (MKZ) (въведен през 1960 година [16]) в леко изменения от Е.У. Чини и А. Шарма вид [3] се дефинира за $f\in C[0,1)$ чрез

$$M_n^{[MKZ]}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{k+n}\right),\quad x\in[0,1),$$

където $P_{n,k}(x)=\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}$ са базисните функции на Майер-Кьоних и Целер. Този оператор е съществено изследван от много автори. Редица прави и обратни теореми са доказани (например в [21]).

Следвайки Дюрмайер, много автори въвеждат и изследват интегрални модификации на MKZ операторите. М. Хайлман [11, 12] и У. Абел, В. Гупта и М. Иван [1] унифицират тези модификации в обща фамилия от оператори в която коефициентите пред базисните функции се разглеждат като скаларни произведения с тегло.

Модифицираният по Гудман-Шарма оператор на Майер-Кьоних и Целер (GS-MKZ) въведен и изследван в [15] се дефинира за естествено n чрез

$$M_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) u_{n,k}(f),$$
$$u_{n,0}(f) = f(0), \quad u_{n,k}(f) = n \int_0^1 P_{n,k-1}(y) f(y) \frac{dy}{(1-y)^2},$$

където f е интегруема по Лебег в $(0,1)$ функция с крайни граница $f(0)$ в 0.

При дефинирането на GS-MKZ ние следвахме идеята на Гудман и Шарма [9, 10] за интегрална модификация на оператора на Бернщайн, запазваща линейните функции.

Тук с $\varphi(x) = x(1-x)^2$ означаваме теглото, което е естествено свързано с вторите производни на MKZ и GS-MKZ операторите. Тегловите функции които разглеждаме са

(1.5)
$$w(x) = w(\alpha_0, \alpha_1; x) = x^{\alpha_0}(1-x)^{\alpha_1}, \quad x \in (0,1), \text{ за } x \in (0,1) \text{ и } \alpha_0, \alpha_1 \in [-1, 0].$$

Нека $C_0(w)[0,1) = \{f \in C(w)[0,1) : f(0) = 0\}$ и $W_0^2(w\varphi)[0,1)$ са подпространствата на $W^2(w\varphi)[0,1)$ от функции g удовлетворяващи допълнително $\lim_{x \to 0+0} \varphi(x) D^2 g(x) = 0$.

Тегловото приближение $\|w(f - M_n f)\|$ с M_n се сравнява с К-функционала между тегловите пространства $C(w)$ и $W^2(w\varphi)$, който за всяка

$$f \in C(w)[0,1) + W^2(w\varphi)[0,1) = \{f_1 + f_2 : f_1 \in C(w)[0,1), f_2 \in W^2(w\varphi)[0,1)\}$$

и $t > 0$ се дефинира с

$$K_w(f,t)_{[0,1)} = \inf_{g \in W^2(w\varphi),\ f-g \in C(w)} \left\{ \|w(f-g)\|_{[0,1)} + t\|w\varphi D^2 g\|_{[0,1)} \right\}.$$

Основният резултат в [15] е Теорема 1.1, съдържаща права и силна обратна теорема от вид А

Теорема. Нека $w = w(\alpha_0, \alpha_1)$ е зададено с (1.5). Тогава за всяка $f \in C(w)[0,1) + W^2(w\varphi)[0,1)$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, имаме

$$\|w(f - M_n f)\|_{[0,1)} \leq 2\ K_w\left(f, 1/(2n)\right)_{[0,1)} \leq 13.7 \|w(f - M_n f)\|_{[0,1)}.$$

Резултатите първоначално бяха получени чрез аналогични методи на използваните в [13] и [14]. В последствие обаче получих съществено различна от предложената от В. Тотик [21] трансформация между оператори от тип на Баскаков и оператори от тип на Майер-Кьоних и Целер, която изпраща операторите запазващи линейните функции в оператори запазващи линейните функции. С помощта на тази трансформация резултатите от [14] се пренесоха за GS-MKZ операторите и съвпаднаха с предварително получените. Въпросната трансформация би могла да се използва за пренасянето на много от известните резултати за оператори от единия тип в резултати за другия. Така например резултатите на В.Тотик за MKZ операторите могат да се пренесат за класическия оператор на Баскаков.

Не на последно място трансформацията дава и съвсем ясно обяснение, защо параметрите на теглото γ_0, γ_∞ са в итервала $[-1, 0]$ при операторите в [14]. Интервалите за параметрите при крайните интервали т.е. [13] и [15] са съвсем естествени, докато при [14] първоначално изглежда, че причината е защото за тези параметри излизат резултати.

Тук е мястото да споменем, че теглови приближения се разглеждат както за отрицателни параметри, така и за положителни. Използването на отрицателните параметри (за крайни интервали) ни дава възможност не само да отчетем, че в крайщата на интервала имаме нула за грешката, но и да отчетем какъв е порядъка на тази нула без да "разваляме"информацията за вътрешността на интервала.

1.4 Общ метод за получаване на оценка на тегловите приближения с оператори запазващи линейните функции.

Отнася се за резултатите в [18].

Разгледани са линейни положителни оператори от тип на Бернщайн запазващи линейните функции. Тегловите функции са както в [13]. Получена е права теорема от тип на Коровкин чрез грешката за функцията $f_2(x) = x^2$. Резултата обобщава резултат от [19], но вече с тегла. Първоначалната идея бе това да е част от статията [13], касаеща сходимостта по теглова норма, но там благодарение на свойствата на оператора, това твърдение не бе нужно. Резултатите са дадени за печат преди получаването на резултатите в [14] и [15] и поради тази причина могат доста да се обобщят.

2 Най-добри приближения с тригонометрични полиноми

Отнася се за резултатите от съвместната ни с Б. Драганов работа [7].

Грешката на най-добрите приближения с тригонометрични полиноми в L_p, $1 \leq p \leq \infty$, се оценява елегантно с помощта на т.нар. класически модул на гладкост (напр. [4, Ch. 7]). Тази характеризация обаче не е инвариантна при прибавяне на тригонометричен полином от дадена степен към апроксимираната функция. За да се справим с това несъответсвие, можем да използваме крайни разлики, които се анулират върху тригонометричните полиноми до дадена степен и с тяхна помощ да построим модул на гладкост със същото свойство. В съвместна работа с Борислав Драганов [7] установихме характеризация на най-добрите приближения с тригонометрични полиноми в L_p, $1 \leq p \leq \infty$, която е съвсем аналогична на класическата, посредством такъв модифициран модул. Установихме и редица основни свойства на модула. Тези резултати се обобщават за произволни хомогенни банахови пространства от периодични функции [6].

3 Точни константи при оценка на грешката на квадратурната формула на Симпсън с помощта на усреднени модули на гладкост

За резултатите в [17].

Направени са оценки на грешката на квадратурната формула на Симпсън с помощта на усреднените модули на гладкост на В. Попов и Бл. Сендов ([20]). В трите разгледани случая са дадени и функции за които се достигат равенства в получените оценки, т.е. имаме точни константи.

Литература

[1] U. Abel, V. Gupta and M. Ivan, The Complete Asymptotic Expansion for a General Durrmeyer Variant of the Meyer-König and Zeller operators, *Mathematical and Computing Modeling.* **40** (2004) 867-875.

[2] V.A. Baskakov, An example of a sequence of the linear positive operators in the space of continuous functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **113** (1957) 249-251.

[3] E. W. Cheney and A. Sharma, Bernstein power series, *Canad. J. Math.* **16** (1964) 241-253.

[4] R.A. De Vore, G.G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Z. Ditzian and K.G. Ivanov, Strong Convers Inequalities. *J. d'Analyse Mathematique,61,* (1991), 61-111.

[6] B.R. Draganov, Estimating the rate of best trigonometric approximation in homogeneous Banach spaces by moduli of smoothness, CTF-2010, Sozopol, Bulgaria submitted to *A Volume on Approximation Theory, dedicated to Borislav Bojanov.*

[7] B.R. Draganov, P.E. Parvanov, On estimating the rate of best trigonometric approximation by a modulus of smoothness, *Acta Math. Hungar.* (to appear).

[8] Z. Finta, On converse approximation theorems. *J. Math. Anal. Appl.* **312** (2005), 159-180.

[9] T. N. T. Goodman and A. Sharma, A Bernstein-type Operator on the Simplex. *Mathematica Balcanica (new series) 5,2,* (1991), 129-145.

[10] T. N. T. Goodman and A. Sharma, A Modified Bernstein-Shoenberg Operator. *Proc. of Conference on Constructive Theory of Functions, Varna'87, Publ. House of Bulg. Acad. of Sci., Sofia,* (1987), 166-173.

[11] M. Heilmann, Eigenfunctions of Durmeyer-type modifications of Meyer-König and Zeller and Baskakov operators, *J. Approx. Theory.* **125** (2003) 63-73.

[12] M. Heilmann, Eigenfunctions and Eigenvalues for Some Durmeyer-Type Operators, *Constructive Theory of Functions, Varna 2005, Edited by B. D. Bojanov, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia*, (2006) 158-167.

[13] K.G. Ivanov and P.E. Parvanov, Weighted Approximation by the Goodman-Sharma Operators. *East Journal on Approximations.* **15**(4) (2009) 473-486.

[14] K.G. Ivanov and P.E. Parvanov, Weighted Approximation by Baskakov-Type Operators, *Acta Math. Hungar.* (to appear).

[15] K.G. Ivanov and P.E. Parvanov, Weighted Approximation by Meyer-König and Zeller-Type Operators. CTF-2010, Sozopol, Bulgaria submitted to *A Volume on Approximation Theory, dedicated to Borislav Bojanov.*

[16] W. Meyer-König and K. Zeller, Bernsteinsche potenzrichen, *Studia Math.* **19** (1960) 89-94.

[17] I.A. Parvanova and P.E. Parvanov, Exact Constants In Estimation Of The Error Of The Quadrature Formulae Of Simpson With Averaged Moduli Of Smoothness. *Mathematica Balcanica* . **Vol.15**(2011), Fasc.3-4, 303-316.

[18] P.E. Parvanov, Weighted Approximation By A Class Of Bernstein-type Operators. *Mathematica Balcanica* . **Vol.25**(2011), Fasc.1-2, 31-38.

[19] P.E. Parvanov and B.D. Popov, The Limit Case of Bernstein's Operators with Jacobi-weights. *Mathematica Balcanica (new series), Vol.8, Fask.2-3,* (1994), 165-177.

[20] Bl. Sendov and V.A.Popov. The Averaged Moduli of Smoothness. *John Willey & Sons.* (1988).

[21] V. Totik, Uniform approximation by Baskakov and Meyer-König and Zeller operators, *Period. Math. Hungar.* **14**(3-4) (1983) 209-228.